Ереванский филиал Московского
экономико-статистического института
Кафедра «Информационная технология»

**С.М. Испирян**

# Теория вероятностей

Учебно-методическое пособие
для студентов
экономических специальностей

Ереван
2013

## Содержание

## Предисловие

Курс «Теория вероятностей» является частью математических дисциплин, составляющих фундамент математического образования специалиста. Теория вероятностей – это математическая – аксиоматическая наука. Впервые законченную систему аксиом сформулировал в 1936 г. академик А.Н.Колмогоров. В любой области человеческой деятельности имеют место случайные явления, которые не позволяют осуществить точный прогноз результатов этой деятельности.

Теория вероятностей изучает закономерности массовых случайных явлений (событий, величин, функций, процессов и др.), способных многократно повторяться при воспроизведении определенного комплекса условий. Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать, помогает принимать решения в условиях неопределённости, направленные на достижение поставленных целей. Основное свойство любого случайного события, независимо от его природы, это мера или вероятность его осуществления.

Теория вероятностей с помощью математической модели случайного эксперимента определяет такие соотношения между вероятностями различных случайных событий (относящихся к данному эксперименту), которые позволяют вычислять вероятности более сложных событий по вероятностям простых. Таким образом, если природа случайного эксперимента известна, то теория вероятностей может точно определить вероятности возможных исходов этого эксперимента и распределение вероятностей случайной величины.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях науки и техники: в теории надёжности, теории массового обслуживания, теоретической физике, геодезии, астрономии, теории ошибок, теории управления, теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках.

Она определяет и анализирует числовые характеристики случайных событий (объектов), наиболее важными из которых являются вероятность события, математическое ожидание, дисперсия случайной величины.

На теорию вероятностей опирается математическая (прикладная) статистика, задача которой состоит в том, чтобы по ограниченным данным (выборке) восстановить с определенной степенью достоверности характеристики, присущие генеральной совокупности, т.е. всему мыслимому набору данных, описывающему изученное явление. Математическая (прикладная) статистика в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов и для других целей.

Одной из важнейших сфер приложения теории вероятностей является экономика. В настоящее время трудно себе представить исследование и прогнозирование экономических явлений без использования эконометрического моделирования, регрессионного анализа, трендовых и сглаживающих моделей и других методов, опирающихся на теорию вероятностей.

Курс «Теория вероятностей» является основой для изучения таких дисциплин, как «Эконометрика», «Статистические методы прогнозирования», «Исследование операций», «Методы оптимизации», «Теория массового обслуживания» и т.д.

Цель учебно-методического пособия – познакомить студентов с основами теории вероятностей. Часть задач, приведенных в пособии, взяты из [3-6,8,12].

# 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

## 1.1 Элементы комбинаторного анализа

Число элементов множеств вычисляют по формулам комбинаторного анализа. Пусть имеется $n$ различимых объектов. Последовательность $\kappa$ объектов из $n$ будем называть комбинацией из $n$ объектов по $\kappa$. Комбинации называют упорядоченными в случае, когда две комбинации, содержащие одинаковые объекты, рассматриваются как различные, если только эти объекты расположены в различном порядке. Комбинации называются неупорядоченными, если комбинации, содержащие одни и те же объекты, считаются одинаковыми независимо от порядка расположения этих объектов.

**Пример 1.1.1** Из трёх объектов (●, ■, ▲) можно составить 6 упорядоченных комбинаций по 2 объекта: (●, ■), (●, ▲), (■,▲ ), (■, ●), (▲, ● ), (▲, ■). Комбинации (●,■ ) и (■, ●) считаются различными. Из этих объектов можно составить 3 неупорядоченные комбинации по 2: (●,■), (●,▲), (■, ▲). Комбинации (●,■) и (■,● ) считаются одинаковыми.

При определении числа различных комбинаций применяют *основное правило комбинаторики,* заключающееся в следующем. Пусть требуется последовательно выполнить $i$ действий, причём 1-е действие можно выполнить $n_1$ способами, 2-е действие - $n_2$ способами и т.д., наконец, $i$-е действие - $n_i$ способами. Число $N$ возможных способов выполнения всей последовательности действий определяется произведением:

$$N = n_1\, n_2 \ldots n_i \,. \tag{1.1.1}$$

**Пример 1.1.2.** Сколько существует трёхзначных чётных чисел, составленных только из цифр 2, 4, 5, 6, 8, 9? Процесс составления трёхзначного числа - это три действия: первое действие - выбор первой цифры, второе - выбор второй цифры, третье - выбор третьей цифры. Первая цифра может быть любой, поэтому первое действие можно выполнить шестью способами. Второе - также шестью способами. Третья цифра должна быть чётной, следовательно, третье действие можно выполнить 4-мя способами. Таким образом, существует всего 6 · 6 · 4 = 144 числа, которые удовлетворяют требованиям задачи.

***1. Размещения с повторениями***. Пусть имеется $n$ различимых объектов. Будем размещать эти объекты по $\kappa$ местам следующим образом. Извлекаем объект из общего числа и, отводим ему очередное не занятое место и возвращаем этот объект обратно. Комбинации, полученные таким образом, называются размещениями с повторением из $n$ объектов по $\kappa$, а процедура их построения - выбором с возвращением. Число вариантов выбора при каждом извлечении равно $n$. Следовательно, общее число таких размещений равно.

$$N = n^k \tag{1.1.2}$$

**Пример 1.1.3.** Число размещений с повторениями из 3 объектов по 2 равно $3^2 = 9$. Возьмём объекты из примера 1.1: (●,■,▲). Тогда размещениями с повторением будут следующие комбинации: (●,●), (●,■), (●, ▲), (■,■ ), (■, ▲), (■, ●), (▲, ▲), (▲, ■), (▲, ●).

***2. Размещения без повторений***. Будем снова размещать $n$ объектов по $\kappa$ местам, не возвращая обратно извлечённые объекты. Полученные комбинации называют размещениями без повторений или просто размещениями. Число размещений из $n$ объектов по $\kappa$ будем обозначать $A_n^k$. Очевидно, что при первом извлечении имеется $n$ вариантов выбора, при втором - ($n$ - 1) вариант, при третьем - ($n$ - 2) и т.д. Число вариантов выбора для $k$-го извлечения равно *( n - к +*1*)*. Применяя основное правило комбинаторики, получим:

$$A_n^k = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1.1.3)$$

Здесь и далее выражение типа $n!$, где $n$ - целое положительное число, означает произведение целых чисел от 1 до $n$ включительно и читается как «$n$-факториал» (0! = 1). Очевидно, что: $n! = n(n-1)!$.

Заметим, что в формуле (1.1.3) обязательно выполнение неравенства: $0 \le к \le n$, а в формуле (1.1.2) $к$ может быть любым целым положительным числом.

**Пример 1.1.4.** В бригаде из 20 рабочих выбирается бригадир, хозяйственник и общественный кассир. Сколько вариантов выбора имеется в распоряжении рабочих?

Здесь $n = 20$, $к = 3$. Число вариантов выбора будет равно $N = 20!/(20\text{-}3)! = 20!/17! = 20\cdot 19\cdot 18 = 6840$.

***3. Перестановки***. Перестановками называются комбинации, которые отличаются друг от друга только порядком расположения объектов. Перестановки являются частным случаем размещений без повторений, когда число мест совпадает с числом объектов, т. е. когда $к = n$. Таким образом, число перестановок из $n$ объектов определяется формулой:

$$N = P_n = A_n^n = n! \qquad (1.1.4)$$

**Пример 1.1.5.** Число перестановок из трёх объектов равно 3! = 6. Перечислим все перестановки из объектов примера 1.1: (●, ■, ▲), (■, ▲, ●), (▲, ●, ■), (●, ▲, ■), (▲, ■, ●), (■, ●, ▲).

***4. Перестановки с повторениями***. Пусть имеется группа из $n$ объектов, состоящая из $r$ подгрупп. Первая подгруппа содержит $n_1$ объектов, вторая – $n_2$ объектов и т.д., наконец, последняя группа содержит $n_r$ объектов, причём внутри каждой подгруппы объекты не различимы. В таком случае число перестановок из $n$ объектов определяется формулой:

$$N = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} \qquad (1.1.5)$$

Здесь $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. Заметим, что при $r = 2$ формула (1.1.5) совпадает с формулой (1.1.6).

**Пример 1.1.6.** На 6 карточках написаны цифры 2, 2, 3, 4, 4, 4. Сколько различных шестизначных чисел можно получить, располагая эти карточки последовательно?

Здесь $n = 6$, $r = 3$, при этом $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 3$. Следовательно, можно составить указанным в задаче способом $N = 6!/(2!\cdot 1!\cdot 3!) = 60$ различных шестизначных чисел.

***5. Сочетания.*** Сочетаниями из $n$ объектов по $к$ называются такие комбинации по $к$ объектов из данных $n$, которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Число сочетаний обозначают $C_n^k$ . Все сочетания можно получить из размещений путём исключения лишних перестановок из $к$ объектов. Следовательно,

$$N = C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ . \qquad (1.1.6)$$

Основное свойство сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$

**Пример 1.1.7.** В бригаде из 20 рабочих требуется выбрать троих для направления в командировку. Сколько существует вариантов выбора?

Последовательность выбора в данном случае не имеет значения. Значит число вариантов выбора равно числу сочетаний из 20 объектов (рабочих) по 3:

$$N = C_{20}^{3} = 20!/(3!17!) = 20\cdot 19\cdot 18/6 = 1140.$$

Для более сложных задач при подсчёте числа комбинаций следует действовать в соответствии с основным правилом комбинаторики.

### *1.2. События. Пространство элементарных событий*

*Теория вероятностей* – это наука, которая применяется к реальным явлениям, обладающим двумя свойствами – *случайностью* и *массовостью*.

Случайность означает, что результаты такого явления могут быть разными и их нельзя однозначно предсказать. *Массовость* означает, что это явление не уникальное, оно может повторяться достаточно много раз без изменения условий.

*Испытанием* (*опытом*) будем понимать создание некоторого комплекса условий, предполагая при этом, что:

1) опыт (т. е. комплекс условий ) может быть повторён достаточно большое число раз в неизмененных условиях;

2) результаты этого опыта при его повторении могут меняться, и их нельзя однозначно предсказать;

3) результаты поддаются точному описанию.

Результаты опыта называются событиями. События, которые происходят обязательно, если только реализован комплекс условий, называют *достоверными* событиями и обозначают буквой *U*. События, которые никогда не осуществляются при реализации этих условий, называют *невозможными* событиями, и обозначают буквой *V*. Наибольший интерес представляет третья группа, в которую входят те события, которые при реализации комплекса условий могут либо произойти, либо не произойти и заранее неизвестно, произойдёт событие или нет. Такие события называют *случайными* событиями и обозначают большими латинскими буквами *A*, *B*, *C*, ...

Пусть опыт заключается в бросании монеты. Тогда примерами случайных событий являются событие *A* – «выпал орел» или событие *B* – «выпала решка». Если опыт состоит в бросании игральной кости, то можно вводить случайные события *A* – «выпала шестерка», *B* – «выпало четное число очков», *C* – «выпавшее число очков не превосходит трех» и т. п. Если опыт заключается в анализе курса доллара в течение месяца, то в качестве примеров случайных событий можно привести событие *A* – «курс доллара увеличился», событие *B* – «курс доллара не изменился», событие *C* – «курс доллара уменьшился на 2%» и т. п. Если опыт – это разыгрывание выигрышей по облигациям, а у нас имеется три облигации, то случайными событиями являются событие *A* – «не выиграла ни одна из облигаций», событие *B* – «выиграла хотя бы одна из облигаций», событие *C* – «выиграла одна облигация», событие *D* – «выиграли все три облигации» и т. п.

По своему логическому содержанию события могут быть составными, т. е. разложимыми на более простые события, и *элементарными*, которые разложить на более простые события уже невозможно. Пусть, например, опыт заключается в том, что из шести карточек, пронумерованных числами от 1 до 6, случайным образом выбирается одна. Обозначим событие, состоящее в том, что выбранная карточка имеет номер $k$, через $\omega_k$. Таких событий шесть. Они полностью описывают возможные результаты опыта и являются элементарными событиями. На этих событиях строятся более сложные события. Пусть *B* – событие, состоящее в том, что номер выбранной карточки чётный; *C* – событие, состоящее в том, что номер карточки делится на 3 без остатка. Очевидно, что $B$ осуществляется тогда, когда осуществляется одно из следующих событий: $\omega_2$, $\omega_4$, $\omega_6$. Это можно условно отобразить записью $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Событие $C$ выполняется только тогда, когда осуществляется одно из событий $\omega_3$, $\omega_6$. Таким образом, $C = \{\omega_3, \omega_6\}$. На основе элементарных событий $\omega_k$, $k = 1, 2, ..., 6$ можно построить и другие составные события.

Неразложимость элементарных событий означает, что при осуществлении опыта обязательно произойдёт одно и только одно из них. Это эквивалентно записи: $U = \{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, что можно прочитать так: «достоверно, что произойдёт одно из перечисленных событий». Совокупность всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий*. Пространство элементарных событий принято обозначать буквой $\Omega$. Заметим, что любое непустое множество можно считать пространством элементарных событий $\Omega$ какого-нибудь опыта. Конечные и счетные множества, как правило, удобно задавать перечислением их элементов. Несчетные множества обычно задают указанием свойства, которым обладают все элементы множества.

Любое случайное событие $A$ представляет собой подмножество $A$ множества $\Omega$. Элементарные события, входящие в подмножество $A$ множества $\Omega$, называются *событиями, благоприятствующими наступлению события $A$* . Само множество $\Omega$ называется достоверным событием, поскольку ему благоприятствует любое элементарное событие, т. е. в результате опыта оно обязательно произойдет. Пустое множество $\emptyset$ называется невозможным событием, так как никакое элементарное событие ему не благоприятствует, поэтому в результате опыта оно не может произойти. Следовательно, событие $U$ совпадает с $\Omega$, а событие $V$ является пустым подмножеством $\emptyset$. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $U$ и $V$ тогда, когда события рассматриваются как конкретные физические явления. На уровне множеств следует пользоваться обозначениями $\Omega$ и $\emptyset$. Следует отметить, что в общем случае событиями можно называть не любые подмножества множества $\Omega$, а лишь удовлетворяющие определенным свойствам. Совокупность всех таких подмножеств (событий) S является, в свою очередь, множеством случайных событий. Определение случайного события как подмножества пространства элементарных событий является основой аксиоматического построения теории вероятностей.

### *1.3. Соотношения между событиями*

Пусть $\Omega$ пространство элементарных событий. Если оно конечное. т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ , число событий, построенных из $к$ элементарных событий, где $0 \le к \le n$, будет равно числу сочетаний из $n$ по $к$. Исходя из этого, можно показать, что число $N$ всех случайных событий S , которые можно построить на $\Omega$ , равно $N = 2^n$. Рассмотрим операции над событиями.

**1.** Если в результате испытания при каждом появлении события $A$ наступает событие $B$, то говорят, что А является *частным случаем $B$* (событие *$A$ влечёт за собой событие $B$*), и записывают этот факт в виде: $A \subset B$.

**2.** Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то события $A$ и $B$ называют *эквивалентными (равносильными, равными)*. Записывают: $A = B$. Заметим, что по физическому содержанию события $A$ и $B$ могут быть различными.

**3.** *Суммой* двух событий $A$ и $B$ называется событие $C$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит или $A$, или $B$, или оба события одновременно. Это отражается записью: $C = A + B$.

**4.** *Произведением* двух событий $A$ и $B$ называется событие $C$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят и $A$ и $B$ одновременно. Записывают: $C = AB$.

**5.** *Разность событий* $A$ и $B$ - это событие $C$, которое происходит тогда и только тогда, когда событие $A$ происходит, а $B$ не происходит. Записывают так: $C = A\text{-}B$.

**6.** *Симметрической разностью* двух событий $A$ и $B$ называется событие $C$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие $A$ ,но не $B$ или событие $B$, но не $A$. Записывают: $C = A\Delta B$, причем

$$A\Delta B= (A-B) + (B-A).$$

**7.** События $A$ и $B$ называются *несовместными,* если их совместное наступление неосуществимо, т.е. если $AB= V$. В противном случае события называют *совместными.*

**8.** Событие $\bar{A}$ (читается «не $A$») называется *противоположным* событию $A$ (и наоборот ), если для них одновременно выполняются неравенства:

$$A + \bar{A}= U; \quad A\bar{A}= V.$$

**9.** События $A_1, A_2, ..., A_n$ представляют собой *полную группу событий,* если в результате опыта хотя бы одно из них обязательно произойдёт. Это эквивалентно тому, что сумма указанных событий равна достоверному событию:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = U.$$

**10.** События $A_1, A_2,..., A_n$ представляют *полную группу попарно несовместных событий,* если выполняются соотношения:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = U \quad и \quad A_iA_k = V, \quad i \neq k.$$

Приведём некоторые очевидные тождества:

$$A + V = A, \quad A + U = U, \quad A + A = A, \quad A + \bar{A} =U,$$
$$AV = V, \quad AU = A, \quad AA = A, \quad A\bar{A}= V.$$

Операции над событиями обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$A + B = B+A, \quad AB = BA;$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C, \quad (AB)C = A(BC) = ABC;$$
$$A + (BC) = (A + B)(A + C) , \quad A(B + C) = AB + AC.$$

**Пример:** Два стрелка одновременно стреляют по мишени. В этом случае пространство элементарных событий содержит 4 события: $\omega_1$, - мишень не поражена; $\omega_2$ - мишень поражена только 1-м стрелком, $\omega_3$ - мишень поражен только 2-м стрелком; $\omega_4$ - мишень поражена обеими стрелками. Таким образом, $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 , \omega_4\}$. На пространстве $\Omega$ можно построить $2^4 = 16$ событий:

$A_1 = \{ \omega_1\}, A_2 = \{ \omega_2\}, A_3 = \{ \omega_3\}$, $A_4 = \{ \omega_4\}, A_5 = \{ \omega_1, \omega_2\}$,
$A_6 = \{ \omega_1, \omega_3\}, A_7 = \{ \omega_1, \omega_4\}$, $A_8 = \{ \omega_2, \omega_3\}, A_9 = \{ \omega_2, \omega_4 \}$,
$A_{10} = \{ \omega_3, \omega_4\}, A_{11} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $A_{12} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, A_{13}= \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$,
$A_{14} = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $A_{15} = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}= \Omega, \quad A_{16} = \emptyset$.

Каждое событие из множества $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ имеет конкретный физический смысл. Например, событие $A_7$ означает, что мишень не была поражена или она была поражена двумя пулями. События $A_8$ - мишень поражена только одной пулей. Событие $A_{12}$ означает, что мишень поражена, т.е. было или одно или два попадания.

Приведём примеры соотношений между событиями.

1. Противоположное событие: $A_7= \bar{A}_8; A_1 =\bar{A}_{12}; A_5 = \bar{A}_{10}; A_9 = \bar{A}_6;$ и т.д.
2. Сумма событий: $A_{14} =A_4+A_5; A_{10} =A_3+A_4; A_{14} = A_1 + A_9; A_{11}= A_5 + A_6$ и т.д.
3. Произведение событий: $A_1 =A_6A_7; A_6 = A_{11}A_{13}; A_{10} = A_{10}A_{13}; A_7 = A_{13}A_{14}$ и т.д.
4. Разность событий: $A_2 = A_8 - A_3; A_8 = A_{12} -A_4; A_5 = A_{15} -A_{10}; A_4 = A_7 - A_1$ и т.д.
5. Симметрическая разность событий: $A_1\Delta A_2=A_5; A_5\Delta A_6=A_8; A_{10}\Delta A_{12}=A_4; A_{11}\Delta A_{10}=A_{14}$ и т.д.

События $A_3$ и $A_9$ являются несовместными, $A_3A_9 = V$, события $A_2, A_5$ и $A_{10}$ составляют полную группу, так как $A_2 + A_5 + A_{10} = U$. События $A_1, A_4$ и $A_8$ представляют полную группу попарно несовместных событий: $A_1 + A_4 + A_8 = U$ и, кроме того, $A_1 A_4 = V$, $A_1A_8 = V$, $A_4 A_8= V$.

Под операциями над событиями понимаются соответствующие операции над множествами. Тем самым, сумма $A+B$, разность $A$-$B$, произведение $AB$, симметрическая разность $A\Delta B$ двух событий и противоположное событие $\bar{A}$, $A\subseteq\Omega$ и $B\subseteq\Omega$ - это *объединение* $A \cup B$, *теоретоко-множественная разность* $A \setminus B$, *пересечение* $A \cap B$, *симметрическая разность* $A\Delta B$ и *дополнение* $\bar{A}$ множеств $A$ и $B$ соответственно.

Одним из основных представлений случайных событий и операций над ними являются так называемые диаграммы Виена. Пусть внутри квадрата, изображенного на рис.1 наудачу выбирается точка, не лежащая ни на одной из нарисованных окружностей . Обозначим через события $A$ и $B$ соответствующий выбор точки в левом и правом кругах. Области, заштрихованные на рис.1, изображают соответственно события $\bar{A}$, $AB$, $A+B$. По диаграммам Виена легко проверяются результаты правил операций между событиями.

$\bar{A}$
$AB$
$A+B$

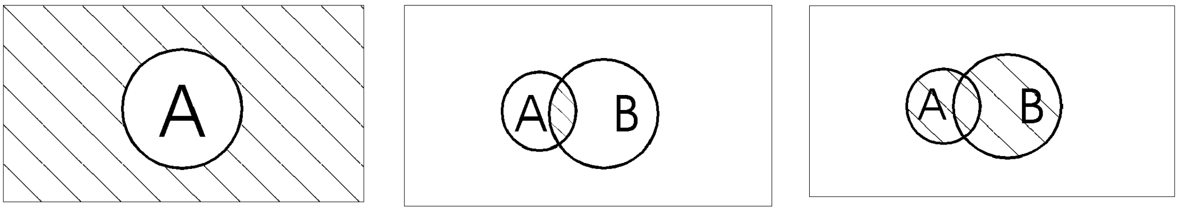


Рис. 1

Заметим, что разницу двух событий $A$ и $B$ можно представить в виде произведения события $A$ и противоположного события $\bar{B}$ : $A$-$B$= $A\bar{B}$. Следовательно, события множества S получаются из элементарных с помощью операций сложения, умножения, и противоположного события и результат любой из перечисленных операций между элементами из S тоже принадлежит S. А это означает, что множество S замкнуто относительно перечисленных операций. Далее, достоверное событие $U$ является единичным элементом(Ω) множества S, т.е. в результате произведения $\forall A\in$S на $U$ элемент $A$ не меняется: $AU=A$, а невозможное событие $V$ является нулевым элементом(∅) для множества S, т.е. при сложении $\forall A\in$S и ∅ сумма не меняется: $A+\emptyset= A$ . А это говорит о том, что множество S является *полем* событий.

### *1.4. Вероятность события*

*Вероятность события* является основным понятием теории вероятностей. С каждым событием $A$ связывается определенное число $P(A)$ -вероятность наступления события $A$ (или, короче, вероятность события $A$), отражающая объективную меру возможности осуществления данного события. Иногда вероятность события $A$ обозначают просто $p$, если из контекста понятно, о каком событии идет речь.

#### *1.4.1. Аксиоматическое определение вероятности*

Точным, строгим, с математической точки зрения, является аксиоматическое определение вероятности. Такое построение теории вероятностей опирается на теорию меры, интегрирования и исходит из некоторого списка неопределяемых формально основных понятий и аксиом, основе которого все дальнейшие понятия отчетливо определяются, а дальнейшие предположения доказываются. В настоящее время в теории вероятностей принята *система аксиом, сформулированная академиком А.Н. Колмогоровым. Основным понятием* аксиоматики является элементарное событие. Рассматривается множество Ω всех элементарных событий U. Выбирается некоторая система S подмножеств этого множества. Элементы множества S определяются как случайные события, или события. События подчиняются следующим аксиомам.

**1**. Если $A$ и $B$ – события, то $\bar{A}$, $\bar{B}$, $AB$ и $A + B$ – тоже события.

**2.** Каждому событию $A$ соответствует неотрицательное число $P(A)$, называемое вероятностью события $A$.

**3.** Достоверное событие $U$ является событием с вероятностью, равной единице, т.е. $P(U) = 1$.

**4.** Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместимы, то $\sum_{i=1}^{n} A_i$ также является событием и вероятность его равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Тройка (Ω, S, P ) – называется вероятностным пространством. Из аксиом и определений выводятся многочисленные утверждения и другие свойства вероятностей, в частности: множество S является полем событий ; что вероятность невозможного события $V$ равна нулю - $P(V) = 0$.

Все рассматриваемые ниже определения вероятности являются, по существу, следствием аксиоматического определения вероятностей.

### *1.4.2. Классическое определение вероятности*

*Классическое определение вероятности* исходит из некоторой системы *равновозможных(равновероятных*) событий. События называются равновозможными, если можно считать, что ни одно из них не является более возможными, чем другие. Равновозможность возникает обычно из-за симметрии в опыте (симметричная монета, хорошо перемешанная колода карт, правильная игральная кость, отсутствие оснований предпочесть один результат эксперимента другому).

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых равновозможных событий $\omega_1$, $\omega_2$, ..., $\omega_N$. Добавим к этим $N$ событиям невозможное событие $V$ и сложные события, образованные с помощью операции сложения любого числа и любых номеров событий $\omega_1$, $\omega_2$, ..., $\omega_N$. Полученная система событий будет полем событий S. Система S исчерпывается конечным числом событий, если считать равносильные события тождественно равными друг другу.

Назовем для краткости событие $\omega_i$ (i=1,2,…,$N$) возможным случаем. Пусть событие $A$ является некоторым событием системы S, тогда $A$ представляется в виде суммы некоторых возможных случаев $\omega_i$. Слагаемые $\omega_i$, входящие в разложение $A$, будут благоприятствующими случаями событию $A$, а их число обозначим буквой $N_A$ .

*Вероятность P(A)* события $A$ равняется отношению числа возможных случаев, благоприятствующих событию $A$, к числу всех возможных случаев.

$$P(A) = N_A/N . \qquad (1.4.2.1)$$

Согласно такому определению подсчет вероятности события сводится к подсчету общего числа возможных случаев и числа случаев, благоприятствующих наступлению события $A$. При их подсчете, как правило, используются комбинаторные формулы.

**Пример 1.4.2.1.** Бросается игральная кость. Какова вероятность того, что число выпавших очков будет не менее 5 (событие $A$)?

Игральная кость имеет 6 граней. Следовательно, общее число исходов опыта (возможных случаев) равно $N_A$ = 6. К осуществлению события $A$ приводят только 2 исхода, когда выпадает или 5 или 6 очков, т.е. $N_A = 2$. Таким образом, искомая вероятность равна $P(A) = N_A/N$ =2/6 = 1/3.

**Пример 1.4.2.2.** Из 10 теннисных мячей, среди которых 4 мяча новые, для очередной игры случайным образом берут три. Какова вероятность того, что среди взятых мячей два мяча будут новыми (событие $A$)?

Можно считать, что все результаты выбора являются равновозможными. Порядок выбора мячей не имеет значения. Это значит, что возможные исходы опыта (возможные случаи) следует рассматривать как сочетания. Так как взято 3 мяча из 10, то общее число исходов опыта будет равно $C_{10}^3$. К событию $A$ приводят такие варианты, когда в число взятых мячей попали 2 мяча из четырёх новых ($C_4^2$) и один мяч из шести старых ($C_6^1$). Следовательно,

$$N = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120, \qquad N_A = C_4^2 \cdot C_6^1 = \frac{4!}{2!2!}\cdot 6 = 36 .$$

Тогда $P(A) = N_A/N = 36/\,120 = 0{,}3$.

## *1.4.3. Геометрическое определение вероятности*

Если пространство элементарных событий не является конечным множеством, то классическое определение вероятности оказывается не приемлемым.

Обобщением понятия классической вероятности на случай с бесконечным числом элементарных событий, которые можно представить в виде точек в пространстве $R^k$ произвольной размерности $k \in \mathrm{N}$ , является *понятие геометрической вероятности.*

Рассмотрим какую-нибудь область $\Omega$ *в $R^k$ (на прямой, на плоскости, в пространстве).* Предположим, что «мера» области $\Omega$ (длина, площадь, объем соответственно) конечна. Пусть эксперимент состоит бросании «наудачу» в эту область точки $X$ . Термин «наудачу» означает, что вероятность попадания точки $X$ в любую область $D \subseteq \Omega$ не зависит от формы или расположения $D$ внутри $\Omega$, а зависит лишь от «меры» области $\Omega$. Для такого эксперимента вероятности определяются согласно *геометрическому определению вероятности*:

$$P(A) = \frac{mes(D)}{mes(\Omega)} \qquad (1.4.3.1)$$

где событие $A$ – точка $X$ попадет в область $D$ , т. е. $A = \{X \in D\}$ ,а *mes* - геометрическая мера множества. При этом, как и в определении классической вероятности, предполагается, что все точки области $\Omega$ равноправны (все элементарные исходы равновозможны).

Если область $\Omega$ линейная ( $\Omega \in \mathbf{R}$ ), то

$$P(A) = \frac{\mathrm{L(D)}}{\mathrm{L}(\Omega)} . \qquad (1.4.3.2)$$

Если область $\Omega$ плоская ( $\Omega \in \mathbf{R}^2$ ),

$$P(A) = \frac{\mathrm{S(D)}}{\mathrm{S}(\Omega)} . \qquad (1.4.3.3)$$

И если область $\Omega$ объемная ( $\Omega \in \mathbf{R}^3$ ), то

$$P(A) = \frac{V(\mathrm{D})}{V(\Omega)} . \qquad (1.4.3.4)$$

Здесь $L$ – длина, $S$ – площадь и $V$ – объем соответствующей области.

Равенство (1.4.3.1) представляющее собой геометрическое определение вероятности охватывает и классическое определение, так как в случае конечных множеств в качестве меры множества можно взять число его элементов.

**Пример 1.4.3.1.** Наудачу называется действительное число из отрезка [0,1] . Найдите вероятность того, что будет названо а) число 0.2, б) одно из чисел 0,0.01,0.02,M,0.99,1, в) число, не превосходящее 0.5(событие $A$).

Вероятность назвать число 0.2 равна нулю, так как равна нулю «длина» одной точки. Заметим, что, тем не менее, число 0.2 может быть названо – это один из элементарных исходов данного опыта.

Нулевая вероятность и у события, заключающегося в том, что будет названо одно из чисел 0,0.01,0.02,M,0.99,1. Этот факт имеет место, поскольку «длина» любого конечного числа точек также равна нулю.

И, наконец, вероятность того, что будет названо число, не превосходящее 0.5, равна отношению длины отрезка [0,0.5] к длине $\Omega = [0,1]$ :

$$P(A) = \frac{L([0,0.5])}{L([0,1])} = 0.5.$$

**Пример 1.4.3.2.** В круг радиуса $r$ случайным образом ставится точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг квадрата (событие $A$), если любое место расположения точки является равновозможным?

Здесь мера множеств - площадь. Множество всех элементарных событий представляет собой круг, а множество событий, приводящих к осуществлению события $A$, образует квадрат. Таким образом, $S(\Omega) = \pi r^2$, а $S(D) = 2r^2$ (площадь вписанного квадрата). Следовательно,

$$P(A) = \frac{S(D)}{S(\Omega)} = \frac{2}{\pi}.$$

**Пример 1.4.3.3.** В шар вписан куб. Какова вероятность, что выбранная наудачу в шаре точка, окажется внутри куба? (событие $A$).

Не ограничивая общности, будем считать, что радиуса шара $r$ равен 1. Согласно определению геометрической вероятности искомая вероятность $P(A)$ равна отношению объемов куба (области $D$) и шара (области $\Omega$ ).

Пусть $a$ - ребро куба. Легко убедиться, что $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$ , т. е. в нашем случае $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Поэтому объем куба $V(D) = a^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Объем шара $V(\Omega)$ с радиусом r = 1, как известно, составляет $\frac{4}{3}\pi$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{V(D)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{9}}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \approx 0.3676.$$

В любом случае смысл вероятности состоит в том, что если событие имеет вероятность осуществления, например, 0.2, то это означает, что при многократном повторении опыта событие произойдёт в среднем в 20% случаев.

### *1.4.4. Статистическое определение вероятности*

Следует отметить, что классическое определение вероятности имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что в практических задачах не всегда можно найти разумный способ выделения или предположения равносильных случаев. Из-за указанного недостатка наряду с классическим пользуются *статистическим определением* *вероятности.* Если классическое определение вероятности исходит из соображений равновозможности событий, то статистически вероятность определяется из опыта, наблюдения результатов испытания , опирающаяся на понятие частоты (или частости *)* случайного события .

Пусть опыт, с которым связано событие $A$, повторяется $n$ раз, а событие $A$ осуществляется при этом $k$ раз ($0 \le \kappa \le n$). Число $\kappa$ появления события $A$ при $n$ испытаниях называется *частотой*, а отношение $\kappa/n$ - *частостью (относительной частотой)* события .Эта частость будет принимать различные значения в разных сериях из $n$ опытов. При увеличении числа опытов $n$ эти значения будут всё плотнее и плотнее группироваться вокруг некоторого (неизвестного) числа. Это число, очевидно, является некоторой объективной характеристикой, связывающей условия данного опыта с возможностью осуществления рассматриваемого события. Частость осуществления события $\kappa/n$ с увеличением числа повторений опыта стремится в определённом смысле к некоторому постоянному числу, которое и принимается за вероятность события $A$.

Пусть испытание состоит в подбрасывании монеты, а событием является появление герба. Приведем результаты трех опытов, произведенных известными статистами Бюффоном и К. Пирсоном: при $n$=4040 $\kappa/n$=0.5080; при $n$=12000 $\kappa/n$=0.5016; при $n$=24000 $\kappa/n$=0.5005. Как видно, относительные частоты незначительно уклоняются от вероятности 0.5, вычисленной на основе классического определения вероятности.

Тот факт, что при большем числе испытаний относительная частота событий остается почти постоянной, приводит к предположению о наличии объективных закономерностей, характеризующих это событие и не зависящих от испытателя.

*Статистическое определение вероятности* заключается в том, что за вероятность события $A$ принимается относительная частота или число, близкое к ней. При этом требуется, чтобы в неизменных условиях было проведено достаточно большое число независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых может произойти или не произойти событие $A$. При достаточно больших значениях $n$ можно принять, что $P(A) \approx \kappa/n$. Заметим, что это есть лишь оценка истинной вероятности. Теоретически факт приближения частоты появления события к его вероятности обосновывается законом больших чисел (Теорема Бернулли).

**Пример 1.4.4.1.** Стрелок сделал 30 выстрелов по мишени, и было зафиксировано 12 попаданий. Оценить вероятность попадания в мишень (событие $A$) этим стрелком.

Здесь $n$ = 30, а $\kappa$ = 12. Следовательно, статистически вероятность $P(A)$ = 12/30 = 0.4.

### *1.5. Сложение вероятностей несовместных событий. Простейшие свойства вероятности*

На основании классического определения вероятности докажем теорему сложения вероятностей несовместных событий и свойства вероятности.

***Теорема сложения вероятностей несовместных событий:*** Если события $A$ и $B$ несовместные, входящие в поле событий S, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + \mathrm{P}(B), \quad \text{если} \quad AB = V. \qquad (1.5.1)$$

***Доказательство.*** Так как события $A$ и $B$ не пересекаются (несовместные), то число исходов опыта $N_{A+B}$, приводящих к осуществлению событий $A$ или $B$, равно сумме исходов $N_A$ и $N_B$, приводящих соответственно к осуществлению событий $A$ и $B$, т.е. $N_{A+B} = N_A + N_B$ . Поделив это равенство на $N$, получим равенство (1.5.1) .

$$P(A + B) = N_{A+B} / N = N_A/N + N_B/N = P(A) + P(B).$$

Это свойство называют свойством аддитивности вероятностей.

Вообще, если $A_1, A_2, ..., A_n$ группа попарно несовместных событий, т.е. $A_i A_k = V$, когда $i \neq к$, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \qquad (1.5.2)$$

Если эта группа событий является еще и полной группой, т.е. $A_1 + A_2 + ... + A_n = U$, то $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(U) = 1$, из чего следует, что

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \qquad (1.5.3)$$

***Следствие .*** Вероятность события $\bar{A}$ , противоположного событию $A$ , равна единице без вероятности события $A$ .

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Действительно, так как события $A$ и $\bar{A}$ несовместны и составляют полную группу, то

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ , следовательно } P(\bar{A}) = 1 - P(A). \qquad (1.5.4)$$

***Свойство 1***. Для вероятности любого события $A$ выполняется неравенство:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \qquad (1.5.5)$$

Действительно, если $N_A$ есть число исходов опыта, приводящих к осуществлению $A$ (благоприятствующими случаями событию $A$), а $N$ - общее число исходов, то $0 \leq N_A \leq N$. Поделив это неравенство на $N$, получим (1.5.5).

***Свойство 2***. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(V) = 0. \qquad (1.5.6)$$

Для невозможного события $N_V = 0$ и, следовательно, $P(V) = 0$. Обратное утверждение не всегда верно. Если $P(A) = 0$, то нельзя утверждать, что $A$ является невозможным событием. Предположим, что на отрезок [0; 2] случайным образом ставится точка. Вероятность того, что точка попадёт в интервал $[x, x + \Delta x)$, будет равна $|\Delta x|/2$. При $\Delta x \to 0$ эта вероятность будет стремиться к нулю. Значит вероятность того, что точка будет иметь координату, совпадающую с $x$, равна нулю для любого значения $x$. Но в результате опыта точка будет иметь конкретную координату, т. е. произойдёт событие с нулевой вероятностью. Равенство $P(A) = 0$ при бесконечном числе исходов опыта нужно понимать в том смысле, что событие $A$ имеет бесконечно малую вероятность и для его реализации опыт придётся повторять неограниченное число раз.

***Свойство 3***. Вероятность достоверного события равна единице, т.е.

$$P(U) = 1. \qquad (1.5.7)$$

Для достоверного события $N_U = N$ и, следовательно, $P(U) = 1$.Здесь также обратное утверждение не всегда справедливо. Действительно, если $P(A) = 1$, то $P(\bar{A}) = 0$ согласно следствию теоремы сложения вероятностей несовместных событий. Событие $\bar{A}$ , имея нулевую вероятность, может иногда произойти (см. примечание к свойству 2). Но в таком случае не произойдёт событие $A$, т.е. $A \neq U$, хотя $P(A) = 1$.

***Свойство 4.*** Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Соотношение $A \subseteq B$ означает, что множество $A$ составляет часть множества $B$ или совпадает с ним. Поэтому всегда $N_A \leq N_B$. Поделив это неравенство на $N$, получим подтверждение свойства 4.

**Пример 1.5.1.** Из 10 деталей, среди которых имеется 4 нестандартных, случайным образом взято 3. Найти вероятность того, что в числе взятых деталей бракованных окажется: 1) не менее 2 (событие $B$); 2) хотя бы одна (событие $C$).

Пусть $A_i$ - событие, состоящее в том, что среди взятых деталей оказалось $i$ нестандартных ($i$ = 0, 1, 2, 3). Тогда $B = A_2 + A_3$ («не менее 2» означает или 2, или 3). События $A_i$ $i$ = 0, 1, 2, 3, являются попарно несовместными. Поэтому $P(B) = P(A_2 + A_3) = P(A_2) + P(A_3)$. Найдём вероятности $P(A_2)$ и $P(A_3)$, пользуясь классической схемой. Обозначим через $N_i$ число исходов опыта, приводящих к осуществлению события $A_i$ ($i$ = 0, 1, 2, 3). Определим $N_2$, $N3$, а также общее число исходов $N$: $N_2 = C_4^2\, C_6^1$=36; $N_3 = C^3_4 C_6^0 = 4$; $N = C_{10}^3$ =120.
Тогда, $P(A_2) = N_2/N$ = 0, 3; $P(A_3) = N_3/N$ = 1/30. Следовательно, $P(B)$ = 0, 3 + 1/30 = 1/3. Очевидно, что события $A_0$ и $C$ являются противоположными событиями, т.е. $C = \overline{A_0}$.

По формуле (1.5.4) $P(C) = P(\overline{A_0}) = 1 - P(A_0) = 1- \frac{N_0}{N} = 1- \frac{C_4^0 C_6^3}{120} = 1- \frac{5\cdot 4}{120} = 1- \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

**Пример 1.5.2.** Каждое из трех несовместных событий $A$, $B$ и $C$ происходит соответственно с вероятностями 0.01; 0.02 и 0.03. Найти вероятность того, что в результате опыта не произойдет ни одного события.

Событие, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из событий $A$, $B$ и $C$, будет сумой событий: $D = A+ B+ C$. Так как по условию события $A$, $B$ и $C$ несовместны , то по (1.5.1)

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.01+0.02 + 0.03 = 0.06 .$$

А событие, вероятность которого требуется найти в задаче, является противоположным событию $D$. Следовательно, по (1.5.4), искомая вероятность равна:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 – 0.06 = 0.94.$$

### *1.6. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей. Зависимые и независимые события*

*Условной вероятностью* события $A$ по отношению к событию $B$ называется вероятность события $A$, вычисленная при условии, что событие $B$ произошло. Таким образом, при вычислении условной вероятности события $A$ при случившемся событии $B$ мы ищем долю исходов, благоприятствующих $A$, среди всех исходов события $B$. Эту условную вероятность будем обозначать $P(A/B)$ или $P_B(A)$ (кратко читается : *“P* от *A* при условии *B").*

Безусловная вероятность события $A$ отличается от условной вероятности. Например: пусть игральная кость подброшена один раз. Известно, что выпало не более трех очков. Какова при этом вероятность того, что выпало четное число очков?

Через $A$ обозначим событие «выпало четное число очков», через $B$ - событие «выпало не более трех очков». Как понимать вероятность события $A$, если известно, что $B$ уже случилось? Мы знаем, что произошло событие $B$, но все равно не знаем, что именно выпало на кости. Однако теперь возможностей осталось только три: могло выпасть одно, два или три очка. Событию $A$ из этих равновозможных исходов благоприятен единственный исход: выпадение двух очков. Поэтому искомая вероятность, т.е. условная вероятность события $A$ при условии, что событие $B$ произошло, равна : $P(A/B)$ = 1/3 .Что касается безусловной вероятности события $A$, то количество возможных случаев равно N=6, а количество благоприятствующих случаев - $N_A=3$ ( два, четыре или шесть очков), следовательно, $P(A)= N_A / N = 3/6 = 0.5$.

Условная вероятность обладает всеми свойствами безусловной вероятности. В частности, $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$. Отметим также, что если $B \subset A$, то $P(A/B) = 1$; если $AB = V$, то $P(A/B) = 0$.

Если условная вероятность совпадает с безусловной вероятностью, т.е. $P(A/B) = P(A)$, то события $A$ и $B$ называются *статистически независимыми событиями.* Это значит, что вероятность осуществления события $A$ не зависит от того, произошло или нет событие $B$. Если $P(A/B) \neq P(A)$, то события $A$ и называются *статистически зависимыми событиями*, т.е. наступление одного из них влияет на возможность появления другого события.

***Теорема умножения вероятностей зависимых событий:*** Вероятность совместного наступления двух зависимых событий равна вероятности одного события, умноженной на условную вероятность другого события при условии, что первое произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \qquad (1.6.1)$$

***Доказательство.*** Пусть N число всех возможных случаев, событию $A$ благоприятствуют $N_A$ случаев, событию $B$ - $N_B$ случаев и событию $AB$ - $N_{AB}$ случаев. Очевидно, что $N_{AB} \leq N_A$ и $N_{AB} \leq N_B$ и $P(AB) = N_{AB} / N$; $P(A) = N_A / N$; $P(B) = N_B / N$. Если событие $A$ произошло, то осуществится один из $N_A$ случаев, ему благоприятствующих. При таком условии событию $B$ благоприятствуют $N_{AB}$ и только $N_{AB}$ случаев благоприятствующих $AB$. Следовательно, $P(B/A) = N_{AB} / N_A$. Точно так же $P(A/B) = N_{AB} / N_B$ Подставляя соответствующие вероятности в очевидные равенства

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_A}{N} \cdot \frac{N_{AB}}{N_A} = \frac{N_B}{N} \cdot \frac{N_{AB}}{N_B},$$

получим : $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Формула умножения вероятностей обобщается для произвольного числа событий:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1 \ldots A_{n-1}) P(A_n / A_1 \ldots A_{n-1}), \qquad (1.6.2)$$

где $P(A_n / A_1 \ldots A_{n-1})$ - условная вероятность события $A_n$ по отношению к произведению всех остальных событий, т. е. вероятность события $A_n$ вычисленная при условии, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ уже произошли. Безусловную вероятность в (1.6.2) можно представить формулой умножения вероятностей. Повторяя это действие $n$ - 1 раз, получим: $P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2 / A_1) \ldots P(A_{n-1} / A_1 \ldots A_{n-2}) P(A_n / A_1 \ldots A_{n-1})$ . В частности, при $n = 3$,

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2). \qquad (1.6.3)$$

***Следствие:*** Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий(теорема умножения для независимых событий):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1.6.4)$$

***Доказательство:*** Пусть $A$ не зависит от $B$, тогда согласно теореме умножения вероятностей (1.6.1) и равенству $P(A/B) = P(A)$, получим $P(AB) = P(B) \cdot P(A)$ или $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$,так что следствие доказано. Не зависит от

Кроме того, из -за независимости $A$ от $B$, имеем равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B),$$

откуда $P(B/A) = P(B)$,т.е. свойство независимости событий взаимно: если $A$ не зависит от $B$, то $B$ не зависит от $A$.

Будем называть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *статистически независимыми,* если условная вероятность любого события по отношению к любому произведению из остальных событий, совпадает с безусловной вероятностью данного события. Другими словами, вероятность осуществления любого события не зависит от того, произошли или не произошли другие события. Для произведения независимых событий справедливо равенство:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)\,P(A_2)\,\dots\,P(A_n). \qquad (1.6.5)$$

В частности, если $A$ и $B$ - статистически независимые события, то

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B). \qquad (1.6.6)$$

**Пример 1.6.1.** Из коробки, содержащей 3 белых и 5 чёрных шаров, наугад взяли 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара оказались чёрного цвета?

Пусть $Ai$ есть событие, состоящее в том, что $i$-й извлечённый шар оказался чёрным ($i$= 1, 2, 3). Тогда искомая вероятность есть вероятность произведения событий $P(A_1A_2A_3)$.

По формуле умножения вероятностей $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$.

Когда берётся первый шар, то в коробке находится 8 шаров, из которых 5 шаров имеют чёрный цвет. Следовательно, $P(A_1)$ = 5/8. Когда берётся второй шар при условии, что событие $A_1$ уже произошло, то в коробке находится 7 шаров, причём чёрных шаров осталось 4 (один уже был взят). Значит $P(A_2/A_1)$ = 4/7. После извлечения второго шара в коробке осталось 6 шаров, в том числе 3 чёрных. Таким образом, $P(A_3/A_1A_2)$ = 3/6=1/2. Искомая вероятность равна: $P(A_1A_2A_3)$ = ( 1/2) ·(4/7) ·(5/8) = 5/28.

Эту вероятность можно получить и непосредственно по классическому определению используя формулу для числа сочетаний.

**Пример 1.6.2.** Два стрелка одновременно, независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго - 0,8. Какова вероятность того, что в мишени окажется две пробоины (событие $C$)?

Пусть событие $A$ - попадание в мишень первым стрелком, событие $B$ - попадание в мишень вторым стрелком. Тогда $C = AB$, причём события $A$ и $B$ являются (по условию задачи) независимыми. Следовательно, $P(C) = P(AB) = P(A)\cdot P(B)$ = 0,6·0,8 = 0,48.

## *1.7. Формула сложения вероятностей*

***Теорема сложения вероятностей:*** Вероятность суммы любых двух событий $A$ и $B$ (совместных или несовместных) равна сумме вероятностей этих событий без вероятности совместного их наступления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.7.1)$$

***Доказательство:*** Рассмотрим следующие представления событий: $A+B$ и $B$.

$$A + B= A + \bar{A}\cdot B\,; \qquad B= AB+\bar{A}\cdot B.$$

Поскольку в правых частях представлены несовместные события, то, применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получим:

$$P(A+B)= P(A) + P(\bar{A}\cdot B); \qquad P(B)= P(AB) + P(\bar{A}\cdot B),$$

откуда следует утверждение (1.7.1).

Отметим, что если события $A$ и $B$ несовместны, то $AB= V$ и $P(AB)= P(V)$= 0, так что

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Применяя дважды формулу (1.7.1), для трёх событий $A$, $B$ и $C$ получим:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \qquad (1.7.2)$$

Вероятность суммы большого числа событий вычисляют обычно через противоположное событие. Сумма событий $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ есть событие, состоящее в том, что произойдёт хотя бы одно из суммируемых событий. Противоположным по отношению к нему является событие $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\dots\overline{A_n}$. Это значит, что $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\dots\overline{A_n} + A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$. События $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ и $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\dots\overline{A_n}$ являются несовместными, а $P(U) = 1$. Поэтому

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\dots\overline{A_n}). \qquad (1.7.3)$$

***Следствие:*** Если производится $n$ одинаковых независимых испытаний , при каждом из которых событие $A$ появляется с вероятностью $p$ то вероятность появления события $A$ хотя бы один раз при этих испытаниях равна : $1 - (1-p)^n$ .

***Доказательство:*** Обозначим через $A_i$ появление события $A$ в $i$-ом испытании ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда событие $B$, состоящее в появлении события $A$ в $n$ испытаниях хотя бы один раз, запишется в виде

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Событие $\overline{B}$ , заключающееся в том, что при $n$ испытаниях событие $A$ не появится ни разу, равно: $\overline{B} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_n}$ . Так как $B + \overline{B} = U$, получим, что

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}).$$

Так как $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - p$ и для любых $i$ события $A_i$ не зависят от остальных : $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$ , окончательно получим

$$P(B) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 1 - (1-p)^n .$$

**Пример 1.7.1.** Два стрелка одновременно, независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6(событие $A$), а для второго стрелка - 0,8(событие $B$). Какова вероятность того, что мишень будет поражена (событие С)?

Мишень поражена, если будет хотя бы одно попадание. Это значит, что $C = A + B$. По условию задачи события $A$ и $B$ статистически независимы. Следовательно, по формуле (1.7.1) имеем: $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.6 + 0.8 - 0.6 \cdot 0.8 = 0.92$. С другой стороны, вероятности противоположных по отношению к $A$ и $B$ событий соответственно равны: $P(\overline{A}) = 0.4$ и $P(\overline{B}) = 0.2$. По формуле (1.7.3) получим: $P(C) = P(A + B) = 1 - P(\overline{A})\,P(\overline{B}) = 1 - 0.4 \cdot 0.2 = 1 - 0.08 = 0.92$.

### *1.8. Формула полной вероятности и формула Байеса*

В некоторых задачах имеется дополнительная неопределённость, которая не позволяет непосредственно определить искомую вероятность. Приведенные формулы-формула полной вероятности и формула Байеса применяются при решении одного класса таких задач.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ составляют полную группу попарно несовместных событий (такие события называются *гипотезами)*, т. е.

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = U, \qquad (1.8.1)$$

причём, $H_iH_k = V$, если только $i \neq k$. Пусть, далее, имеется некоторое событие $A$, которое может произойти с одним из событий $H_i$ $i = 1,2, \ldots, n$. Вероятности $P(H_i)$ и $P(A/H_i)$ являются известными. Требуется вычислить вероятность $P(A)$.

Умножим равенство (1.8.1) на событие $A$, имея в виду, что $AU = A$:

$$A = AU = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + A\,H_n .$$

Последняя сумма состоит из попарно несовместных событий: если $i \neq k$, то $(AH_i)(AH_k) = AH_iAH_k = AAH_iH_k = AV = V$. Поэтому, $P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + A\,H_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n)$. Кроме того, $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$. Получили формулу, которую называют *формулой полной вероятности:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A\,/\,H_i) \qquad (1.8.2)$$

Заметим, что всегда $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$, так как $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = U$.

**Пример 1.8.1.** Три автоматические линии изготовляют однотипные изделия и работают на общий конвейер. Производительности 1-ой, 2-ой и 3-ей линий находятся в соотношении 2 : 3 : 5. Вероятность изготовления дефектного изделия на 1-ой линии равна 0.05, для 2-ой линии эта вероятность равна 0.08, для 3-ей – 0.1. С общего конвейера наугад берётся изделие. Какова вероятность того, что это изделие не имеет дефектов (событие $A$)?

Возможны три гипотезы: $H_1$ - изделие было изготовлено на 1-ой линии, $H_2$ – на 2 -ой, $H_3$–на 3-ей. Из соотношения производительностей линий находим, что $P(H_1) = 0.2$ ;

$P(H_2)$=0.3; $P(H_3)$ = 0.5. Вероятности изготовления бездефектного изделия на линиях равны: $P(A/H_1)$ =1-0.05=0.95; $P(A/H_2)$ =1- 0.08= 0.92 и $P(A/H_3)$ =1- 0.1= 0.9. Тогда $P(A)$ равна: $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3)$ = 0.2 · 0.95 + 0.3 · 0.92 + 0.5 · 0.9 = 0.916.

Этот результат означает, что в среднем 916 изделий из 1000 будут без дефектов.

Пусть в результате опыта событие $A$ произошло. Какое из событий $H_1, H_2, ..., H_n$ стало причиной осуществления события $A$? Точно на этот вопрос ответить невозможно, но можно определить вероятность того, что причиной стало то или иное событие.

По формуле умножения вероятностей : $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)= P(A)P(H_i/A)$.

Отсюда, для $i = 1,2, ...,n$ имеем:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} \quad \text{или} \quad P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)} \qquad (1.8.3)$$

Формулу (1.8.3) называют *формулой Байеса*. По формуле Байеса находится вероятность того, что имела место гипотеза $H_i$ при условии, что событие $A$ произошло.

Вероятности $P(H_i)$ $i$ = 1,2, ...,$n$ вычисленные заранее, до проведения опыта, называют *априорными вероятностями* (a'priori - «от предшествующего», «до»). Условные вероятности $P(H_i/A)$ $i$ = 1,2, ...,$n$ называют *апостериорными вероятностями* (a'posteriori - «от последующего», «после»). Формулы Байеса (1.8.3) позволяют переоценить заранее известные вероятности после того, как получено знание о результате опыта. Эти формулы находит многочисленные применения в экономике, статистике, социологии и т. п.

**Пример 1.8.2.** Группа из 12 стрелков включает в себя трёх мастеров спорта, четырёх кандидатов в мастера и пятерых перворазрядников. Мастер спорта может попасть в мишень с вероятностью 0,9, кандидат в мастера - с вероятностью 0,85, перворазрядник - с вероятностью 0,75. Наудачу выбранный стрелок сделал выстрел, мишень была поражена (событие А). Какова вероятность того, что этот стрелок является мастером спорта?

Неизвестно, какой стрелок сделал выстрел. Имеются гипотезы: $H_1$ - стрелял мастер спорта, $H_2$ - стрелял кандидат в мастера, $H_3$ - стрелял перворазрядник. По условию, $P(H_1)$= 3/12, $P(H_2)$= 4/12, $P(H_3)$ = 5/12. Кроме того, даны вероятности попадания для стрелков каждой группы: $P(A/H_1)$= 0,9, $P(A/H_2)$= 0,85, $P(A/H_3)$ = 0,75. Вероятность того, что мишень была поражена наудачу выбранным стрелком - $P(A)$, по формуле полной вероятности будет:

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3) = (3\cdot 0,9 + 4\cdot 0,85 + 5\cdot 0,75)/12 \approx 0,821.$$

Тогда, вероятность того, что мишень была поражена мастером спорта, получится по формуле (1.8.3) :

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{3\cdot 0,9}{12\cdot 0,821} \approx 0,274.$$

## *1.9. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли*

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и то же испытание (опыт) повторяется многократно.

Пусть некоторый опыт повторяется $n$ раз. Будем считать, что вероятность осуществления события $A$, связанного с данным опытом, при каждом повторении опыта остаётся неизменной и равна $P(A)=p$. Следовательно, также будет неизменной вероятность противоположного события $\bar{A}$ и равной $P(\bar{A}) = q = 1 - p$. Такая последовательность проведения одного и того же опыта называется *последовательностью независимых испытаний.* Независимость понимается в том смысле, что вероятность осуществления события $A$ в любом по номеру повторении опыта не зависит от результатов опыта при всех других повторениях. Такие испытания называются *испытаниями Бернулли*. Традиционно исход испытания считают успехом, если произошло событие $A$, и неудачей, если произошло событие $\bar{A}$. Например, при проверке качества товара: событие $A$ – единица продукции оказалась качественной (успех), событие $\bar{A}$– единица продукции оказалась бракованной (неудача); при бросании монеты: событие $A$ – выпал орел (успех), событие $\bar{A}$ – выпала решка (неудача); при стрельбе по минени: событие $A$ – попадание (успех), событие $\bar{A}$– промах (неудача) и т. п.

Найдём вероятность $P_n(к)$ того, что событие $A$ в $n$ испытаниях произойдёт $к$ раз. Отметим, что здесь не требуется появление $к$ раз события $A$ в определенной последовательности.

Пронумеруем повторяемые опыты целыми числами от 1 до $n$ и обозначим через $Ai$ событие, состоящее в том, что в $i$-ом опыте событие $A$ произошло, а через $\overline{A_i}$ - что в $i$-ом опыте событие $A$ не произошло. Тогда $P(A_i) = p$ и $P(\bar{A}_i)= q$ для любого $i$. Если принять всю последовательность испытаний за один опыт, то результатами этого опыта будут, например, события вида $C_j = A_1A_2\bar{A}_3A_4\bar{A}_5\ldots\bar{A}_{n-2}A_{n-1}\bar{A}_n$ .

Так как на любом $i$-ом месте этого произведения может стоять либо $A_i$, либо $\bar{A}_i$ то всего таких событий будет $2^n$ (по общему правилу комбинаторики), т.е. $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$. Рассмотрим только те из них, которые содержат $к$ множителей типа $A_i$ и $n$-$к$ множителей типа $\bar{A}_i$ причём взаимное расположение различных типов множителей не имеет значения. Анализ показывает, что число таких событий равно числу сочетаний из $n$ объектов по $к$. Все события $C_j$ являются попарно несовместными. Так как испытания независимы, то вероятность любого события $C_j$ равна произведению вероятностей всех множителей. Таким образом, вероятность любого события $C_j$ , содержащего $к$ множителей типа $A_i$ будет равна $P(C_j) = p^kq^{n-k}$, следовательно

$$P_n(к)=\sum_j P(C_j)=C_n^kp^kq^{n-k},$$

Здесь суммирование проводится только по тем значениям $j$, для которых число множителей типа $A_i$ в событии $C_j$ равно $k$.

Итак, вероятность появления события $A$ в $n$ независимых испытаниях $k$ раз равна

$$P_n(к) = C_n^kp^kq^{n-k}, \qquad (1.9.1)$$

где $q = 1 - p$, а $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ число сочетаний из $n$ элементов по $к$. Эта формула называется *формулой Бернулли.* Рассмотрим следствия, вытекающие из формулы Бернулли.

**1.** Вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях событие $A$ произойдёт не менее чем $i$ раз, равна

$$P(к\geq i) = \sum_{k=i}^{n} C_n^k\, p^k q^{n-k} \qquad (1.9.2)$$

или

$$P(к \geq i) = 1 - \sum_{k=0}^{i-1} C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1.9.3)$$

Действительно, пусть $B_k$ - событие, состоящее в том, что событие $A$ произойдёт $к$ раз. Тогда событие $B_i + B_{i+1}+ \ldots + B_n$ означает, что $A$ произойдёт не менее чем $i$ раз. Противоположным этому событию является событие $B_0 + B_1 + \ldots + B_{i-1}$. Слагаемые в суммах - попарно несовместные события. Отсюда,

$$P(\kappa \geq i) = P(B_i+B_{i+1}+\cdots+B_n)= \sum_{k=i}^{n} P(B_k)$$

или, в соответствии с формулой (1.5.4), $P(\kappa \geq i) = 1 - P(B_0 + B_1 + \ldots + B_{i-1}) = 1 - \sum_{k=0}^{i-1} P(B_k)$.

Эти соотношения и доказывают справедливость формул (1.9.2) и (1.9.3).

**2.** Вероятность того, что событие $A$ произойдёт хотя бы один раз в $n$ независимых испытаниях, определяется формулой (частный случай формулы (1.9.3) при $i = 1$):

$$P(\kappa \geq 1) = 1- q^n. \qquad (1.9.4)$$

(это тот же результат, что и в следствии п. ***1.7.***).

**3.** Если выбрать такое $n$, что $n \geq \frac{|\ln(1-\mathrm{P})|}{|\ln(1-p)|}$ (1.9.5)

то с вероятностью, не меньшей Р, событие $A$ произойдёт в испытаниях хотя бы один раз.

Действительно, из (1.9.4) будем иметь: $P(\kappa \geq 1) = 1 - q^n \geq \mathrm{P}$. Откуда: $1- \mathrm{P} \geq q^n$. Прологарифмируем это неравенство: $\ln(1 - \mathrm{P}) \geq n\ln q$ или $\ln(1 - \mathrm{P}) \geq n\ln(1 - p)$. Поделив последнее неравенство на $\ln(1 - p)$ и учитывая, что оба логарифма отрицательны, получим формулу (1.9.5). В качестве $n$ берётся ближайшее целое число, превосходящее значение правой части неравенства.

**Пример 1.9.1.** Проводятся стендовые испытания шести приборов, каждый из которых, независимо от других, с вероятностью $p = 0{,}4$ может быть признан годным без дополнительных регулировок. Событие $B$ - только два прибора не потребуют регулировок, событие С - хотя бы два прибора не потребуют регулировок. Найти $P(B)$ и $P(C)$.

Очевидно, имеет место схема Бернулли при: $n = 6$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Тогда вероятность $P(B)$ определяется непосредственно формулой Бернулли:

$$P(B) = P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6!}{2!4!} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^4 = 15 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}1296 \approx 0{,}311.$$

Вероятность события С вычислим через вероятность противоположного события:

$$P(C) = 1-P(\bar{C}) = 1-P(k<2)= 1-P_6(0)-P_6(1) = 1- C_6^0 p^0 q^6 - C_6^1 p^1 q^5 = 1-0{,}6^6 - 6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^5 \approx 1-0{,}047 -0{,}187 = 0{,}766.$$

**Пример 1.9.2.** Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,3. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0, 95, мишень имела хотя бы одну пробоину?

Здесь достаточно воспользоваться формулой (1.9.5) при $p = 0{,}3$ и $P = 0{,}95$:

$$n \geq \frac{|\ln(1-P)|}{|\ln(1-p)|} = \frac{|\ln(1-0{,}95)|}{|\ln(1-0{,}3)|} = \frac{|\ln(0{,}05)|}{|\ln(0{,}7)|} \approx \frac{2{,}9957}{0{,}3567} \approx 8{,}398.$$

Число $n$ должно быть целым, поэтому $n = 9$. Таким образом, если сделать 9 выстрелов, то с вероятностью, не меньшей чем $P = 0{,}95$, мишень получит хотя бы одну пробоину. Отметим, что вероятности $P_n(\kappa)$ совпадают с соответствующими членами разложения бинома $(p + q)^n$ : $(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_n(k)$ . Поэтому распределение вероятностей (1.9.1) (по различным значениям $\kappa$) называю биномиальным законом распределения вероятностей. Из этого соотношения следует, что сумма всех вероятностей равна единице (условие нормировки вероятностей), так как $(p + q)^n = 1^n = 1$.

Каждое из чисел $\kappa$ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots, n)$ имеет свою вероятность при проведении последовательности независимых испытаний. Число $s$, которому соответствует наибольшая вероятность $P_n(\kappa)$, называется *наивероятнейшим числом* появлений события в последовательности $n$ независимых испытаний. По определению, $P_n(s) \geq P_n(s - 1)$ и $P_n(s) \geq P_n(s + 1)$. Раскрывая эти неравенства и упрощая их, получим:

$$np - q \leq s \leq np + p . \qquad (1.9.6)$$

Если границы промежутка определяются дробными числами, то в промежутке имеется одно целое число, которое и является наивероятнейшим числом. Если границы определяются целыми числами, то существует два наивероятнейших числа: $s_1 = np - q$ и $s_2 = np + p$.

**Пример 1.9.3.** Вероятность появления события $A$ в каждом испытании одна и та же и равна 0,7. Определить наивероятнейшее число появлений события в $n$ испытаниях и вероятность этого числа при $n = 8$ и при $n = 9$.

Положим $n = 8$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Подставляя в неравенство (1.9.6) эти данные, получим: $8\cdot 0{,}7-0{,}3 \le s \le 8\cdot 0{,}7+0{,}7$ или $5{,}3 \le s \le 6{,}3$. Следовательно, $s = 6$ и $P_8(6) = C_8^6\cdot 0{,}7^6\cdot 0{,}3^2 \approx 28 \cdot 0{,}1176 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}296$.

При $n = 9$ неравенство (1.9.6) будет: $9 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le s \le 9 \cdot 0{,}7 + 0{,}7$ или $6 \le s \le 7$. Следовательно, существует два наивероятнейших числа: $s_1 = 6$ и $s_2 = 7$. Вероятности этих чисел одинаковы: $P_9(7) = P_9(6) = C_9^6\cdot 0{,}7^6 \cdot 0{,}3^3 \approx 84 \cdot 0{,}1176 \cdot 0{,}0027 \approx 0{,}267$ .

## *1.10. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона*

При большом числе испытаний $n$ вычисление вероятности частоты $к$ наступления события $A$, появляющегося в одинаковых независимых испытаниях с вероятностью $p$: $P_n(к)$, по формуле Бернулли сопряжено с очень громоздкими вычислениями и трудно практически осуществить при $n > 20$. В этом случае, как правило, используют так называемые асимптотические формулы, дающие при больших значениях $n$ сколь угодно малую погрешность. Муавром и Лапласом была получена асимптотическая формула, позволяющая найти указанную вероятность. Теорема, выражающая эту формулу, носит название локальной теоремы Муавра-Лапласа.

*Локальная теорема Муавра-Лапласа*: Вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p$ ($0 < p < 1$), событие наступит ровно $к$ раз, определяется приближённым равенством:

$$P_n(к) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (1.10.1)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - *функция Гаусса,* $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ .

Конкретные значения функции Гаусса можно брать из специальной таблицы (см. приложение, табл. 1). При этом следует помнить, что функция Гаусса четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ . Кроме того, при $|x| > 4$ можно полагать $\varphi(x) = 0$.

Точность этого приближённого равенства тем выше, чем больше число испытаний $n(n > 100)$, $p > 0{,}1$( близких к 0,5) , а $np > 10$ .

*Интегральная теорема Лапласа:* Вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p$ ($0 < p < 1$), событие наступит не менее $к_1$ раз и не более $к_2$ раз, приближенно равна

$$P_n(к_1 \le к \le к_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (1.10.2)$$

где $x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})dt$ - *функция Лапласа* .

Формула (1.10.2) дает наибольшую точность также при $p = q = 0{,}5$.

Имеются таблицы функции Лапласа (приложение, табл. 2) для положительных значений $x$ ($0 \le x \le 5$); для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Если вероятность события $p$ в отдельном испытании близка к нулю(такие события называются редкими), то даже при достаточно больших $n$, но небольшой величине произведения $np$, формула Муавра-Лапласа (1.10.1) непригодна. В этих случаях применяют другую асимптотическую формулу – *формулу Пуассона*, справедливость которой доказывает следующая теорема.

*Теорема Пуассона*: Если вероятность $p$ наступления события в каждом испытании постоянно близка к нулю, число независимых испытаний $n$ достаточно велико, произведение $np=\lambda$, то вероятность $P_n(к)$ приближенно равна

$$P_n(к) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (1.10.3)$$

Имеются таблицы для вычисления $P_n(к)$, для различных $\lambda$ и $к$ (приложение, табл. 3). Формула Пуассона хорошее приближение дает при $p \leq 0{,}1$, $n \geq 100$, $np \leq 10$.

**Пример 1.10.1.** Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

По условию задачи $n = 100$; $к = 50$; $p = 0{,}51$; $q = 1 - p = 0{,}49$. Так как $n = 100$ - достаточно большое число и $p > 0{,}1$, воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_n(к) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \quad , \quad \text{где} \quad x = \frac{к - np}{\sqrt{npq}} .$$

Найдём значение $x$: $x = \frac{50-100\cdot 0{,}51}{\sqrt{100\cdot 0{,}51\cdot 0{,}49}} \approx -0{,}2$. По справочным таблицам (см. приложение, табл.1) найдем $\varphi(-0{,}2) = \varphi(0{,}2) \approx 0{,}3910$ (т.к. функция $\varphi(x)$ - четная). Искомая вероятность равна: $P_{100}(50) = \frac{0{,}3910}{5} \approx 0{,}0782$.

**Пример 1.10.2.** Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз и не более 90 раз.

По условию задачи: $n = 100$; $k_1 = 75$; $k_2 = 90$; $p = 0{,}8$; $q = 1 - p = 0{,}2$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа: $P_n(k_1 \leq к \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа и $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. Вычислим $x_1$ и $x_2$: $x_1 = \frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} \approx -1{,}25$, $x_2 = \frac{90-100\cdot 0{,}8}{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2} \approx 2{,}25$. Так как функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим:

$$P_{100}(75 \leq к \leq 90) = \Phi(2{,}25) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}25) + \Phi(1{,}25).$$

По справочным таблицам (см. приложение, табл.2) найдём: $\Phi(2{,}25) = 0{,}4938$; $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$. И окончательно получим искомую вероятность:

$$P_{100}(75 \leq к \leq 90) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

**Пример 1.10.3.** Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

Так как вероятность $p = 0{,}004$ очень мала, применение локальной теоремы Муавра-Лапласа приведет к значительному отклонению от точного значения $P_n(к)$. Поэтому при $p \leq 0{,}1$ применяют формулу Пуассона: $P_n(к) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$. По условию задачи $n = 1000$; $к = 5$; $p = 0{,}004$. Тогда $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$. Подставляя данные задачи, получим

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5 e^{-4}}{5!} \approx 0{,}1562$$

# 2. Случайные величины

## *2.1. Определение, классификация и закон распределения случайных величин*

*Случайной величиной* называют величину, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное числовое значение, причем заранее не известно какое именно. Примеры случайных величин: число попаданий в мишень при данном числе выстрелов; число очков, выпадающее при бросании игральной кости; интервал времени между двумя последовательными появлениями автобуса на данной остановке - подверженных различным колебаниям в зависимости от многих причин, учесть которые мы не в состоянии.

Случайные величины (с. в.) обозначают большими латинскими буквами $X$ , $Y$ , $Z$ и т. п., а принимаемые ими значения – малыми буквами $x$ , $y$ , $z$ , $x_1$ , $x_2$ и т. п.

Используя теоретико-множественный подход, можно дать более строгое определение случайной величины. *Случайной величиной* $X$ будем называть числовую функцию, определенную на пространстве элементарных событий $\Omega$.

Тем самым, с. в. $X$ каждому элементарному событию $\omega$ ставит в соответствие действительное число $X(\omega)$. Иными словами, $X = X(\omega)$, где $\omega \in \Omega$.

В зависимости от характера области возможных значений можно выделить три вида случайных величин: *дискретные, непрерывные* и на величины *смешанного* типа. Возможные значения *дискретной* случайной величины составляют конечное или бесконечное, но счётное, множество. Возможные значения *непрерывной* случайной величины составляют непрерывное множество из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины - бесконечно. Все возможные значения дискретной случайной величины можно пронумеровать (хотя бы в принципе, если они составляют бесконечное множество), для непрерывной случайной величины это сделать невозможно. Случайная величина *смешанного* типа кроме непрерывного множества возможных значений имеет ещё возможные значения, изолированные от этого множества.

Для того чтобы получить полное представление о данной случайной величине, недостаточно знать, какие значения она принимает. Нужно знать и насколько часто они принимаются этой величиной в результате испытаний, т.е. вероятность этих значений.

Соответствие между областью возможных значений случайной величины и множеством вероятностей этих значений (функция, график функции, таблица и т. п.) носит название *закона распределения случайной величины.*

Функцию, устанавливающую соответствие между областью возможных значений и множеством вероятностей для каждого вида случайных величин, можно задать разными способами.

## *2.2. Дискретная случайная величина*

Для характеристики дискретной случайной величины нужно знать совокупность возможных значений этой величины, а также вероятности, с которыми эти значения могут появиться. Закон распределения дискретной случайной величины $X$ может быть задан в виде *ряда распределения* – функции, ставящей в соответствие каждому возможному значению случайной величины определенную вероятность. Таким образом, ряд распределения – это конечное или счетное множество пар элементов:

$$(x_i, p_i), \quad i=1,2, \dots \; ; \quad p_i=P(X=x_i) =\varphi(x_i), \qquad (2.2.1)$$

т.е. закон распределения дискретной случайной величины $X$ может быть задан *аналитически*, в виде формулы (2.2) или с помощью функции распределения (см. п. **2.3.**).

Так как случайная величина $X$ примет обязательно какое-нибудь из своих возможных значений $x_i$, то $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ для с.в., принимающей конечное число $n$ возможных значений, и если множество возможных значений $X$ бесконечно (принимающей счетное число значений), то ряд $p_1 + p_2 + ... + p_n + ...$ сходится и его сумма равна единице: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1$ .

Ряд распределения удобно изображать в следующем виде:

$$X =\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{Bmatrix} ,$$

в верхней строке указаны возможные значения $x_i$ дискретной с.в. $X$, а в нижней - соответственно вероятности того, что $X$ примет значение $x_i$.

Перечислить возможные значения и указать их вероятности можно таблично. Если $p_i = P(X = x_i)$ – есть вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение $x_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $n$), то таблица из двух строк представляет *табличное задание* величины $X$:

| $x_k$ | $x_1$ | $x_2$ | ..... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $p_1$ | $p_2$ | ..... | $p_n$ |

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1$ ($x_1$, $p_1$), $M_2$($x_2$, $p_2$), ..., $M_n$($x_n$, $p_n$) ($x_i$ - возможные значения $x$, $p_i$ - соответствующие вероятности, $i=1,2,\dots n$) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником или полигоном распределения вероятностей* (рис. 2.2.1).

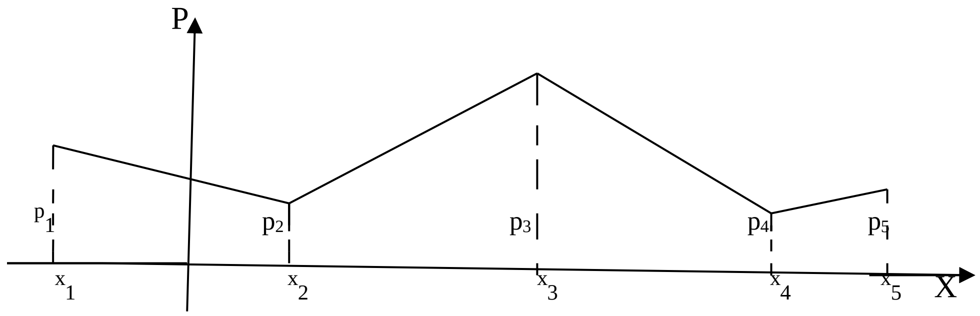


Рис. 2.2. 1. Полигон распределения

Для непрерывных величин эти способы задания являются неприемлемыми, так как невозможно перечислить все возможные значения непрерывной случайной величины

**Пример 2.2.** Выпущено 100 лотерейных билетов: на 5 из них выпадает выигрыш в сумме 50$, на 10 – выигрыш в 30$, на 15 – 20$, на 20 – 10$. Определить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины $X$ – выигрыша на один билет.

Величина $X$ может принять одно из пяти возможных значений: 0, 10, 20, 30 и 50. Заметим, что число билетов без выигрыша равно 100 – 5 – 10 – 15 – 20 = 50.

Следовательно, $P(X = 0) = 50/100 = 0{,}5$.

Аналогично находим все другие вероятности: $P(X = 10) = 0{,}2$, $P(X = 20)= 0{,}15$, $P(X = 30)= 0{,}1$, $P(X = 50)= 0{,}05$. Табличное задание закона распределения величины $X$ будет:

| $x_k$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | 0,5 | 0,2 | 0,15 | 0,1 | 0,05 |

А полигон распределения вероятностей показан на рис. 2.2.2

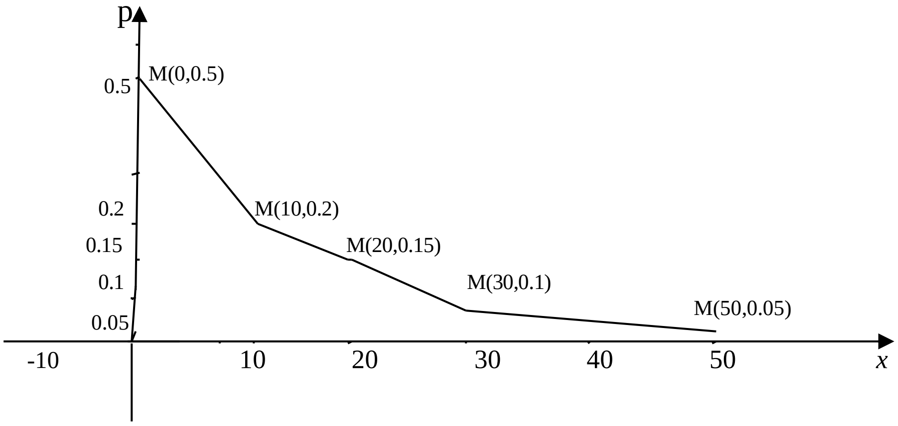


Рис. 2.2.2 Полигон распределения

### *2.3 Функция распределения вероятностей случайной величины и её свойства*

Наиболее общим способом задания различных по своей природе случайных величин является *функция распределения вероятностей* случайной величины (интегральный закон распределения). Функцией распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины $X$ , аргумент которой принимает любое действительное значение $x$, называется вероятность того, что в результате опыта случайная величина примет значение, меньшее, чем $x$, т.е. $F(x) = P(X < x)$. Функция распределения обладает следующими основными свойствами:

**Свойство 1.** Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:
$0 \leq F(x) \leq 1$.
Это вытекает из определения функции распределения.

**Свойство 2.** $F(-\infty) = \lim F(x) = 0.$
Действительно, по определению, $F(-\infty = P(X < -\infty)$. Событие $(X < -\infty)$ является невозможным событием: $F(-\infty) = P(X < -\infty)= P(V) = 0$.

**Свойство 3.** $F(\infty)=\lim F(x) =1$.
По определению, $F(\infty) = P(X < \infty)$. Событие $X < \infty$ является достоверным событием. Следовательно, $F(\infty) = P(X < \infty)= P(U) = 1$.

**Свойство 4.** Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[a, b)$, равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале.

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \qquad (2.3.1)$$

Действительно: обозначим событие $X < a$ через $A$, событие $X < b$ – через $B$ и событие $a \leq X < b$ – через С. Очевидно, что $B=A+C$, причем события $A$ и $C$ являются несовместными. Следовательно, $P(B)=P(A)+P(C)$, или $P(C)= P(B) - P(A)$, т.е. имеет место (2.3.1).

**Свойство 5.** $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$, т.е. функция распределения вероятностей

является неубывающей функцией. Положим в (2.3.1) $a = x_1$ и $b = x_2$.
Получим $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$. Но всегда $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, значит $F(x_2) \ge F(x_1)$.

**Свойство 6.** Вероятность того, что непрерывная случайная величина $X$ примет одно определенное значение $x$, равна нулю: $P(X = x) = 0$.
Рассмотрим вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $[x, x + \Delta x)$, $\Delta x > 0$. По (2.3.1) имеем: $P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$. Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x \le X < x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} F(x + \Delta x) - F(x).$$

Предел равен вероятности того, что случайная величина примет значение, равное $x$.
Так как $X$ непрерывная, то функция $F(x)$ непрерывна в точке $x$, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} F(x + \Delta x) = F(x), \quad \text{т.е.} \quad P(X = x) = 0.$$

Поэтому, если $X$ - непрерывная случайная величина, то вероятности $P(a \le X < b)$), $P(a < X \le b)$, $P(a \le X \le b)$ и $P(a < X < b)$ равны. (Для дискретных величин эти вероятности не одинаковы в том случае, когда границы интервала $a$ и (или) $b$ совпадают с возможными значениями случайной величины. Для дискретной случайной величины необходимо строго учитывать тип неравенства в формуле (2.3.1)).

**Свойство 7.** Если все возможные значения случайной величины $X$ принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.
В самом деле: когда $x \le a$ событие $X < x$ является невозможным, следовательно $F(x) = 0$, а при $x \ge b$ событие $X < x$ является достоверным, поэтому $F(x) = 1$.

**Свойство 8.** Функция распределения вероятностей непрерывна слева(в любой точке $x_0$ ):

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0) .$$

Различия между функциями распределения вероятностей дискретной и непрерывной случайных величин хорошо иллюстрировать графиками. Пусть, например, дискретная случайная величина имеет $n$ возможных значений, вероятности которых равны $P(X = x_k) = p_k$, где $к = 1, 2, \dots, n$. Если $x \le x_1$, то $F(x) = 0$, так как левее $x$ нет возможных значений случайной величины. Если $x_1 < x \le x_2$, то левее $x$ находится всего одно возможное значение, а именно значение $x_1$. Значит, $F(x) = P(X = x_1\} = p_1$. При $x_2 < x \le x_3$ слева от $x$ находится уже два возможных значения: $x_1$ и $x_2$, поэтому $F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2$. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что если $x_{k-1} < x \le x_к$ то $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{к-1}$, $1 \le к \le n$. Наконец, если $x > x_n$, то $F(x) = 1$, так как функция будет равна сумме вероятностей всех возможных значений, которая, по условию нормировки, равна единице. Таким образом, функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k ,$$

где суммирование ведется по всем значениям $к$, для которых $x_k < x$.

График функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины представляет собой ступенчатую разрывную линию, непрерывную слева (рис. 2.3.1 для $n$=5).
Возможные значения непрерывной случайной величины располагаются плотно на интервале задания этой величины, что обеспечивает плавное возрастание функции распределения $F(x)$, т.е. её непрерывность. График функции распределения $F(x)$ для

непрерывной случайной величины называется интегральной кривой распределения и имеет, например, вид, указанный на рис.2.3.2

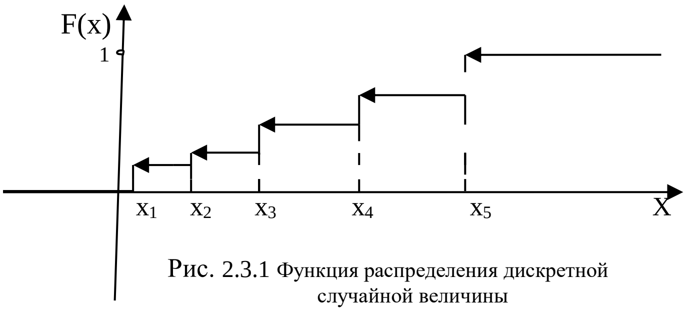


Рис. 2.3.1 Функция распределения дискретной случайной величины

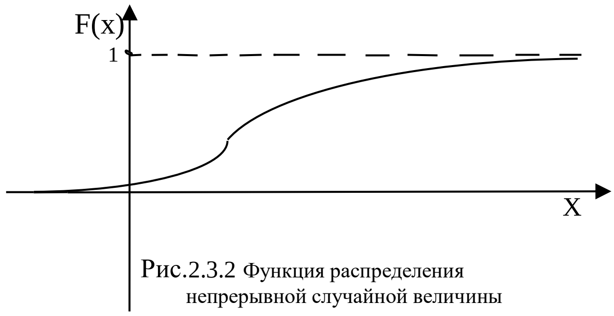


Рис.2.3.2 Функция распределения непрерывной случайной величины

## *2.4. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины и её свойства*

Непрерывная случайная величина задается не только функцией распределения вероятностей, но и другим способом, называемым *плотностью распределения вероятностей.*

Рассмотрим вероятность попадания непрерывной случайной величины $X$ в интервал $[x,\ x+\Delta x)$. По формуле (2.3.1) эта вероятность из себя представляет приращение функции распределения $F(x)$ этой случайной величины на данном интервале.

$$P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x). \qquad (2.4.1)$$

Для малых значений $\Delta x$ эта вероятность будет также достаточно малой из - за того, что функция $F(x)$ непрерывная. Поделив обе части формулы (2.4.1) на приращение аргумента $\Delta x$, получим среднюю скорость изменения непрерывной функции распределения вероятностей на этом интервале и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}\ .$$

Если этот предел существует, то он равен производной от функции распределения $F(x)$ и имеет смысл моментальной скорости изменения непрерывной функции распределения вероятностей в точке $x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x) \qquad (2.4.2)$$

Функция $f(x)$, первая производная от функции распределения непрерывной случайной величины, называется *плотностью распределения вероятностей* случайной величины $X$(дифференциальным законом распределения).

Из определения следует, что при малых значениях $\Delta x$ справедливо равенство:

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x. \qquad (2.4.3)$$

Рассмотрим свойства плотности распределения $f(x)$.

**Свойство 1.** Плотность распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \ge 0$.

Это вытекает из (2.4.2) и от того, что функция $F(x)$ является неубывающей функцией ($F(x + \Delta x) - F(x) \geq 0$).

**Свойство 2.** Для функции распределения $F(x)$ справедливо равенство:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.4.4}$$

Действительно, так как по определению $f(x) = F'(x)$, то $F(x)$ является первообразной функцией по отношению к плотности распределения $f(x)$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x)$$

**Свойство 3.** Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $[a, b)$ , равна:

$$P(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f(t)dt \;. \tag{2.4.5}$$

Действительно, в соответствии с формулой Ньютона - Лейбница этот определённый интеграл равен $F(b)$ - $F(a)$. По свойству 4 функции распределения вероятностей, эта разность и представляет собой вероятность $P(a \leq X < b)$.

**Свойство 4.** Несобственный интеграл от плотности распределения вероятности по всей области задания случайной величины равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \tag{2.4.6}$$

Равенство (2.4.6) представляет условие нормировки вероятностей по свойству 3 функции распределения вероятностей: $F(\infty) = 1$. Если областью задания случайных величин является отрезок $[a; b]$, то $\int_{a}^{b} f(t)dt = 1$. Условие нормировки вероятностей часто используется для определения неизвестного параметра закона распределения.

Заметим, что для удобства изучения непрерывных случайных величин плотность распределения определяют не на конечном интервале возможных значений случайных величин, а на всей действительной числовой прямой, полагая, естественно, $f(x)$ тождественно равной нулю для $x$, лежащих вне интервала возможных значений случайной величины.

График плотности распределения носит название кривой распределения (рис,2.4.1).

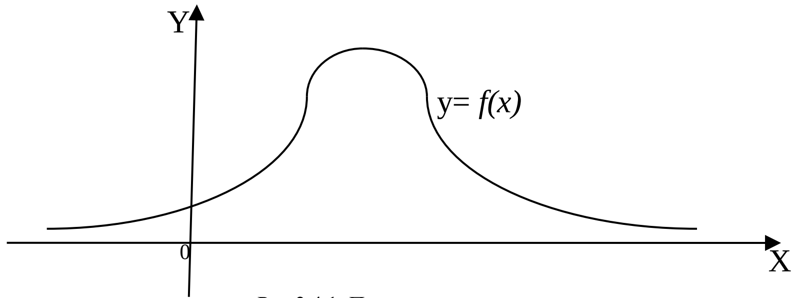


Рис.2.4.1. Плотность распределения

**Пример 2.4.1.** Задана функция распределения непрерывной случайной величины (н.с.в.) $X$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ ax^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Найти коэффициент $a$, плотность распределения $f(x)$ с. в. $X$ и вероятность попадания $X$ в отрезок [-1,1].

Поскольку с. в. $X$ непрерывна, то $F(x)$ непрерывна в любой точке и, в частности, в точке $x = 2$, т.е. $F(2)= \lim\limits_{x\to 2+0} F(x)$ . Так как $\lim\limits_{x\to 2+0} F(x) = \lim\limits_{x\to 2} 1 = 1$ и $F(2)= a\cdot 2^2 = 4a$, получаем: $4a = 1$, откуда $a = \frac{1}{4}$ .

Плотность распределения $f(x) = F'(x)$ определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0 \\ \frac{x}{2}, & \text{если} \quad 0 \le x < 2, \\ 0, & \text{если} \quad x > 2 \end{cases}$$

Причем в точке $x = 2$ плотность распределения $f(x)$ не определена, поскольку в этой точке функция $F(x)$ не дифференцируема.

Согласно формуле: $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$ , имеем:

$$P(-1 \le X \le 1)=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} \frac{x}{2}dx=0+\frac{x^2}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

Тот же результат можно получить иначе: $P(-1 \le X \le 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ .

Решения примера иллюстрируем графически как на графике функции распределения вероятностей $F(x)$(рис.2.4.2), так и на графике плотности распределения $f(x)$(рис.2.4.3) .

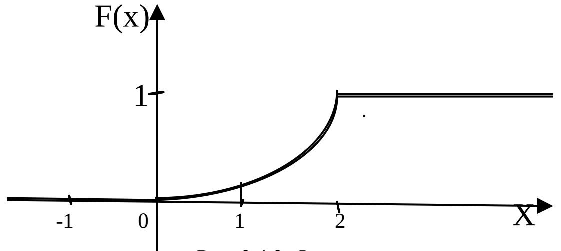


Рис. 2.4.2. Функция распределения

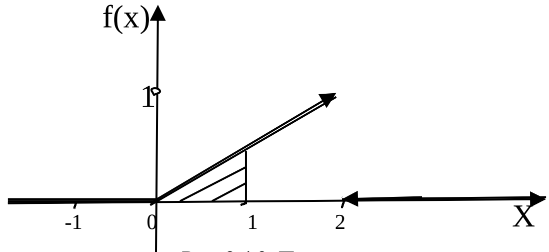


Рис. 2.4.3. Плотность распределения

## 2.5. *Функция случайной величины и ее математическое ожидание*

Пусть $X$ - дискретная случайная величина, имеющая $n$ возможных значений $x_1, x_2, ..., x_n$, вероятности которых равны соответственно $p_1, p_2, ..., p_n$. Рассмотрим некоторую функцию $y = \varphi(x)$. Возможным значениям $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины $X$ будут соответствовать возможные значения $y_1, y_2, ..., y_n$ случайной величины $Y$, являющейся функцией случайной величины $X$: $Y = \varphi(X)$, причём вероятностями этих значений будут также $p_1, p_2, ..., p_n$.

Сделаем $N$ измерений случайной величины $X$, вычислим соответствующие значения функции $\varphi(X)$ и найдём её среднее арифметическое значение на основе полученных данных. Пусть $N > n$. Тогда в последовательности измерений величины $X$ каждое из её возможных значений встретится многократно. Предположим, что значение $x_1$ повторяется $N_1$ раз, $x_2$ - $N_2$ раза, ..., $x_n$ - $N_n$ раз, причём $N_1 + N_2 + ... + N_n = N$. Тогда среднее арифметическое значение $m_\varphi$* функции $\varphi(X)$ определяется следующей суммой:

$$m_\varphi^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(x_i)\cdot N_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\cdot p_i^*$$

Будем увеличивать число измерений случайной величины $X$. При $N \to \infty$ относительная частота $p_i^* = N_i / N$ появлений значения $x_i$ среди измерений будет в некотором смысле приближаться к истинной вероятности $p_i$ этого значения. При $N \to \infty$ величина $m_\varphi^*$ будет приближаться к величине $m_\varphi$, определяемой следующей формулой: $m_\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot p_i$ .

Эта величина называется *математическим ожиданием функции* $Y = \varphi(X)$.

Пусть теперь $X$ является непрерывной случайной величиной с плотностью распределения вероятностей $f(x)$. Будем считать, что эта величина определена на отрезке $[a; b]$, т. е. $f(x) \neq 0$ при $x \in [a; b]$ и $f(x) = 0$ при $x \notin [a; b]$. Разделим отрезок $[a; b]$ на $n$ элементарных частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ так, что $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$. В каждом частичном интервале выберем произвольно точку $z_k$: $x_{k-1} < z_k < x_k$. Вероятность $p_i$ попадания случайной величины в $k$-й частичный интервал будет равна

$$p_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx f(z_k) \cdot \Delta x_k ,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, причём точность приближения последнего равенства будет тем выше, чем меньше $\Delta x_k$ . Будем рассматривать новую дискретную случайную величину $Z$, полагая, что эта величина принимает значение $z_k$, если только $X$ попадает в $k$-й частичный интервал. Тогда $Z$ будет иметь $n$ возможных значений $z_1, z_2, ..., z_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$. Следовательно, можно вычислить математическое ожидание функции $\varphi(Z)$:

$$m_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_k) \cdot p_k \approx \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_k) \cdot f(z_k) \cdot \Delta x_k .$$

Получилась интегральная сумма, которая стремится к определённому интегралу при стремлении к нулю всех $\Delta x_k$ (при этом $n \to \infty$, а $z_k$ стремится к текущему значению $x$):

$$m_\varphi = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx .$$

Имея ввиду, что $f(x) = 0$ вне интервала $[a; b]$ и интегрирование на этих участках числовой оси не изменяет значения интеграла, формулу можно написать в более общем виде интегрируя в пределах от $-\infty$ до $\infty$: $m_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$.

*Математическим ожиданием* функции $\varphi(X)$ случайной величины $X$ называется величина $m_\varphi$, которая имеет символическое обозначение $M(\varphi(X))$ и определяется по формулам:

$$m_\varphi = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot p_i, & \text{для дискретных с.в.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx, & \text{для непрерывных с.в.} \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

где $x_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) – возможные значения дискретной случайной величины; $p_i$ – вероятности этих значений; $n$ – общее число возможных значений; $f(x)$ – плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Из формул (2.5.1)следует, что математическое ожидание функции не всегда существует. Если интеграл в (2.5.1)оказывается несобственным интегралом, то он может сходиться или не сходиться. Аналогично, в дискретном случае, когда множество возможных значений случайной величины является неограниченным ($n = \infty$), математическое ожидание функции будет представлять собой числовой ряд, который также может сходиться или расходиться. Математическое ожидание функции существует, если соответствующий числовой ряд (для дискретной величины) или соответствующий интеграл (для непрерывной величины) сходятся абсолютно. Если нет абсолютной сходимости, то говорят, что математическое ожидание функции не существует.

**Пример 2.5.1.** Случайная величина $X$ задана таблично:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,05 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,15 |

Вычислить математическое ожидание функции $Y = \varphi(X) = X^2$.
Применим формулу (2.5.1)для дискретной случайной величины $X$ ($n = 6$):

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2\, p_i = 0^2 \cdot 0{,}05 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}15 = 8{,}65$$

**Пример 2.5.2.** Задана плотность распределения вероятностей случайной величины $X$: $f(x) = \boldsymbol{\lambda} e^{-\lambda x}$, $\boldsymbol{\lambda} > 0$, $x \geq 0$, а для $x < 0$ плотность $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание функции $\varphi(X) = X^k$, где $к$ - целое число ($к \geq 0$).

Воспользуемся формулой (2.5.1)для непрерывной случайной величины:

$$M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x^k \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^k} \int_{0}^{\infty} t^k e^{-t}\, dt = \frac{k!}{\lambda^k}\ . \qquad (2.5.2)$$

(используется метод замены переменной: $x = \frac{1}{\lambda} t$; $dx = \frac{1}{\lambda} dt$ , а последний интеграл вычисляется интегрированием по частям $к$ раз)·

## *2.6. Числовые характеристики случайных величин. Основные числовые характеристики*

Для практического применения не всегда необходимо иметь полное представление о случайной величине, достаточно знать некоторые ее числовые характеристики, дающие суммарное представление о случайной величине. Числовые характеристики случайных величин можно условно разделить на основные и вспомогательные. К основным характеристикам относятся характеристики центра группирования (положения )случайной величины и характеристики вариации (рассеяния). Характеристики центра группирования указывают некоторую точку на числовой оси, вокруг которой группируются возможные значения случайной величины. К ним относятся математическое ожидание, мода и медиана случайной величины. Характеристики вариации являются некоторой мерой разброса возможных значений случайной величины около своего центра рассеяния, например, математического ожидания. Характеристиками вариации являются дисперсия, среднее квадратическое отклонение случайной величины, хотя эта характеристика однозначно определяется дисперсией, и вероятное отклонение случайной величины.

Дополнительные характеристики применяются для дальнейшего уточнения свойств случайной величины. К ним, прежде всего, относятся асимметрия (или скошенность) и эксцесс (или островершинность) закона распределения случайной величины. К дополнительным характеристикам относится и коэффициент вариации случайной величины, который характеризует относительный разброс возможных значений случайной величины.

*Математическое ожидание* случайной величины является основной характеристикой центра группирования случайной величины на числовой оси. Если в формуле для математического ожидания функции от случайной величины положить φ($X$) = $X$, то получим математическое ожидание $m_x$ самой случайной величины $X$.

$$m_x = M(X)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_\text{i} \cdot p_i\,, & \text{для дискретных с.в.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx\,, & \text{для непрерывных с.в.} \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

Математическое ожидание $M(X)$ указывает точку на числовой оси, вокруг которой группируются возможные значения случайной величины. В определённом смысле эта точка является центром распределения вероятностей случайной величины. Заметим, что математическое ожидание случайной величины может не существовать.

Отметим простейшие свойства математического ожидания.

**1.** Математическое ожидание постоянной величины C равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

**2.** Математическое ожидание суммы конечного числа $n$ случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n).$$

**3.** Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей: (см. п.**3.4.** и п.**3.5.)**

$$M(X_1\cdot X_2... X_n) = M(X_1)\cdot M(X_2)...M(Xn).$$

**4.** Постоянный множитель C можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)= CM(X).$$

**5.** Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс их ковариационный момент(см. п. **3.5.**), т.е.

$$M(XY)= M(X)\cdot M(Y) + C_\text{xy}.$$

**Пример 2.6.1.** Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной таблично:

| $x_k$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

По формуле (2.6.1) для дискретных случайных величин получаем: $M(X)$ = 0 · 0,1 + 0,5 ·0,1 + 1 · 0,2 + 2 ·0,3 + 3 · 0,2 + 4 ·0,1 = 1,85. Полученное значение математического ожидания $M(X)$ = 1,85 не совпадает ни с одним из возможных значений случайной величины. Сама величина может принимать только свои возможные значения, но при многократных измерениях величины среднее арифметическое измеренных значений будет неограниченно приближаться к значению 1,85 при неограниченном увеличении числа измерений.

**Пример 2.6.2.** Задана плотность распределения вероятностей случайной величины $X$:

$$f(x) =\begin{cases} \frac{x^3}{4}, & \text{если } 0 \le \text{x} \le 2 \\ 0, & \text{если x} < 0 \text{ или x} > 2 \end{cases}$$

Требуется найти математическое ожидание этой случайной величины.

Воспользуемся формулой (2.6.1)для непрерывной случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\cdot\frac{x^3}{4}dx = \frac{x^5}{4\cdot 5} = \frac{x^5}{20}\Big|_0^2 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Если математическое ожидание случайной величины не существует, то в качестве характеристики положения случайной величины применяют моду или медиану.

*Модой* случайной величины $X$ называется такое значение $x$, при котором плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины $f(x)$ принимает максимальное значение. Для дискретной случайной величины модой является её наиболее вероятное значение $x$. Мода обозначается через $Mo(X)$.

Для нахождения моды непрерывной случайной величины нужно исследовать плотность распределения вероятностей на максимум. Для этого нужно найти критические точки, в которых либо $f'(x) = 0$, либо $\nexists\ f'(x)$, затем применить к найденным точкам один из достаточных признаков максимума. Если максимумов вообще нет, то говорят, что моды не существует. Если максимум один, то закон распределения называют одномодальным, если максимумов несколько, то - многомодальным.

**Пример 2.6.3.** Задана плотность распределения вероятностей случайной величины

$X$:

$$f(x)= \begin{cases} \lambda^2 xe^{-\lambda x},\ \lambda > 0, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Требуется найти моду этой случайной величины.

Найдём производную от плотности распределения: $f'(x)=\lambda^2(e^{-\lambda x} - \lambda x\, e^{-\lambda x})= \lambda^2 e^{-\lambda x}(1 - \lambda x)$. Уравнение $f'(x) = 0$ имеет одно решение: $1 - \lambda x = 0$ или $x = 1/\lambda$. Таким образом, $Mo(X) = 1/\lambda$.

*Медианой* случайной величины $X$ называется такое значение $x$, которое разбивает всю область возможных значений случайной величины на две равновероятные части, т. е.

$$P(X < x) = P(X \geq x) = 0{,}5.$$

Медиана обычно обозначается через $Me(X)$. По определению, медиана находится как решение уравнения $F(x) = 0{,}5$. Из определения следует, что медиана, как и мода, точно может быть определена только для непрерывных случайных величин. Очевидно, что для дискретных величин это уравнение либо не имеет решения, либо имеет бесчисленное множество решений в силу ступенчатого характера функции распределения вероятностей. В случае симметричных распределений медиана совпадает с математическим ожиданием случайной величины. Если, к тому же, распределение является одномодальным, то совпадают все три характеристики - математическое ожидание, мода и медиана.

**Пример 2.6.4.** Задана функция распределения вероятностей случайной величины $X$:

$$F(x) = \begin{cases} 1-\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$ *(распределение Релея).*

Найти медиану случайной величины.

Медиану находим как решение уравнения $F(x) = 0{,}5$:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = 0{,}5 \qquad \text{или} \qquad \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = 0{,}5.$$

Прологарифмируем последнее равенство: $-\frac{x^2}{2\sigma^2} = ln\frac{1}{2}$ = -ln2, откуда: $x = \pm\sigma\sqrt{2ln2}$ .
Так как случайная величина $X$ определена на положительной полуоси, поэтому отрицательной медианы быть не может. Следовательно, $Me(X) = \sigma\sqrt{2,n2}$ . Для сравнения приведем здесь другие характеристики центра группирования для данного распределения: $Mo(X) = \sigma$; $M(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

*Дисперсия* $D_x$, или $D(X)$, случайной величины $X$, как основная характеристика вариации, характеризует средний разброс, рассеяние значений случайной величины около математического ожидания. Дисперсия определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания, т.е.

$$D_x = D(X) = M\,(X - M(X))^2. \qquad (2.6.2)$$

Дисперсию можно представить в другом виде . Раскрывая (2.6.2), получим:
$D_x = D(X) = M\,(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2XM(X) + M^2(X)) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$ *(2.6.3)*

Применяя формулу(2.5.1), определяющую математическое ожидание произвольной функции от случайной величины, получим:

$$D_x = D(X) = M\,(X - M(X))^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 \cdot p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx \end{cases} \qquad (2.6.4)$$

В (2.6.4) первая строка соответствует дискретной случайной величине, вторая - непрерывной. Для существования дисперсии необходима сходимость числового ряда в (2.6.4) для дискретной величины (если $n = \infty$), или сходимость интеграла в (2.6.4) для непрерывной величины.

Дисперсия обладает следующими свойствами.

**1.** Дисперсия постоянной величины С равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

**2.** Постоянный множитель С можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X).$$

**3.** Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых: (см. п.**3.4.** и п.**3.5.)**

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n).$$

**4.** Для любой постоянной величины С справедливо следующее соотношение:

$$D(X) = M(X - C)^2 - (C - M(X))^2.$$

Из этого следует, что для любого С выполняется неравенство:

$$D(X) \le M(X - C)^2,$$

т. е. рассеяние случайной величины около произвольной точки С числовой оси всегда не меньше, чем дисперсия. Равенство достигается тогда, когда С = $M(X)$. Это свойство часто используется для упрощения вычислений при нахождении дисперсии.

**5.** Дисперсия суммы или разности произвольных случайных величин определяется формулой:

$$D(X \pm Y)= D(X) + D(Y) \pm 2C_{xy},$$

где $C_{xy}$ - ковариационный момент величин $X$ и $Y$ (см. п.**3.5.**).

.

Свойство **5.** обобщается на случай $n$ случайных величин. Если $Z = X_1 + X_2 + ... + X_n$, то

$$D(Z) = D(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) + 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{i \neq k} C_{ik}$$

где $C_{ik}$ - ковариационный момент между $i$-й и $k$-й случайными величинами.

**6.** Дисперсия произведения двух статистически независимых случайных величин определяется следующей формулой (см. п.**3.4.** и п.**3.5.**):

$$D(XY) = D(X)D(Y)+ m_x^2 D(Y)+ m_y^2 D(X).$$

Дисперсия не всегда является удобной мерой рассеяния случайной величины. Если, например, случайная величина $X$ измеряется в метрах, то дисперсия $D(X)$ будет измеряться в квадратных метрах. Это обстоятельство вносит определённые неудобства. Поэтому часто применяют *среднее квадратическое отклонение* $\sigma_x$ или $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} \quad \text{или} \quad D(X) = \sigma^2(x). \qquad (2.6.5)$$

Иногда вместо термина «среднее квадратическое отклонение» применяют термин *«стандартное отклонение»*.

Пусть случайная величина $X$ имеет математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x) \neq 0$, тогда случайная величина

$$T = \frac{X - M(X)}{\sigma(x)}$$

называется *стандартизованной (центрированной и нормированной)*. Легко можно показать, что такая случайная величина обладает тем свойством, что ее математическое ожидание равно нулю, а дисперсия равна единице: $M(T)=0$; $D(T)=1$.

**Пример 2.6.1.** Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$, заданной таблично:

| $x_k$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Сначала найдём математическое ожидание: $M(X)$ = -2 ·0,1+ -1·0,1+ 0 ·0,2+ 1·0,3+ 2 ·0,2 + 3·0,1 = 0,7. Дисперсию вычислим непосредственно по формуле (2.6.4):

$$D(X)=\sum_{i=1}^{6}(x_i - M(X))^2 p_i =(-2-0,7)^2\cdot 0,1+(-1-0,7)^2\cdot 0,1+(0-0,7)^2\cdot 0,2+(1-0,7)^2\cdot 0,3+(2-0,7)^2\cdot 0,2+ (3-0,7)^2\cdot 0,1 = 2.01.$$

Таким образом, математическое ожидание $M(X)$ = 0,7, дисперсия $D(X)$ = 2.01, следовательно, среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)= \sqrt{D(X)} = \sqrt{2.01} \approx 1.42$.

**Пример 2.6.2.** Задана плотность распределения вероятностей случайной величины $X$:

$$f(X)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0 \le x \le \pi \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > \pi \end{cases}.$$

Определить дисперсию случайной величины $X$ .

Вычислим математическое ожидание используя метод интегрирования по частям:

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x\, dx = \frac{1}{2}[-x\cdot\cos x\,|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx] = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin x|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ .

Найдём теперь $M(X^2)$: $M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ .
Интегрируя дважды по частям, получим: $M(X^2) = \frac{1}{2}[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x]\,|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi^2 - 4)$ . Таким образом, из формулы (2.6.3), имеем:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{1}{2}(\pi^2 - 4) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

В качестве меры относительного отклонения случайной величины от своего математического ожидания применяется коэффициент вариации. *Коэффициентом вариации* $K_v$ случайной величины называется отношение среднего квадратического отклонения этой величины к её математическому ожиданию, т.е.

$$K_v = \frac{\sigma(x)}{M(x)} \qquad (2.6.6)$$

Коэффициент вариации широко применяется в теории надёжности. Пусть, например, случайная величина $T$ представляет собой время безотказной работы некоторой технической системы. Тогда, чем меньше коэффициент вариации этой величины, тем выше качество данной системы. Таким образом, для повышения качества системы нужно повышать среднее время безотказной работы и понижать среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы от своего среднего значения. Заметим, что не для всех законов распределения коэффициент вариации можно изменять как угодно. Например, для экспоненциального закона распределения коэффициент вариации всегда равен единице, а для некоторых распределений он может изменяться только ступенчатым образом.

## 2.7. Квантили, квартили и вероятное отклонение

*Квантилью* порядка $p$ случайной величины $X$ называется число $x_p$, для которого выполняется следующее равенство:

$$P(X < x_p) = p \quad \text{или} \quad F(x_p) = p. \qquad (2.7.1)$$

Квантили удобны для сравнения различных законов распределения вероятностей. В некоторых случаях пользуются *децилями:* $x_{0.1}$, $x_{0.2}$, $x_{0.3}$, ..., $x_{0.9}$ Однако наибольшее распространение получили квартили. *Квартилями* называют квантили порядков 0,25, 0,5 и 0,75. Будем их обозначать соответственно как $k_1$, $k_2$, $k_3$. Квартили $k_1$ и $k_3$ называют обычно нижней и верхней квартилями. Вторая квартиль $k_2$ совпадает, очевидно, с рассмотренной ранее медианой распределения.

С помощью квантилей удобно сравнивать распределения по величине рассеяния возможных значений случайных величин. В частности, если дисперсия случайной величины не существует, то в качестве меры рассеяния можно применить величину $E = 0{,}5(k_3 - k_1)$, которую называют *вероятным отклонением* или *срединным отклонением.* Для симметричных распределений вероятное отклонение можно определить из следующего выражения: $P(|X - M(X)| \leq E) = 0{,}5$.

Чем больше известно квантилей, тем более полное представление можно составить о характере закона распределения случайной величины. Однако, описание случайных величин с помощью квантилей применимо лишь к непрерывным случайным величинам. Для дискретных случайных величин функция распределения вероятностей имеет ступенчатый характер. Поэтому уравнение (2.7.1) будет иметь решения только для некоторых значений р.

**Пример 2.7.1.** Дана функция распределения вероятностей случайной величины $X$ (распределение Релея).

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x \le 0 \end{cases}$$

Определить квартили и вероятное отклонение этой случайной величины.

Квантили любого порядка $p$ определяются уравнением (2.7.1): $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = p$ или $\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = 1 - p$. Разрешая это уравнение относительно $x$, получим квантиль порядка $p$: $x_p = \sqrt{2}\sigma\sqrt{-\ln(1-p)}$.

Подкоренное выражение в полученной формуле не может быть отрицательным, так как $1 - p \le 1$ и, следовательно, всегда $\ln(1 - p) \le 0$. Подставляя в полученную формулу $p = 0,25$, $0,5$ и $0,75$ и проводя преобразования, получим три квартили: $k_1 = \sigma\sqrt{2(ln4 - ln3)} \approx 0,76\sigma$, $k_2 = \sigma\sqrt{2ln2} \approx 1,18\sigma$, $k_3 = 2\sigma\sqrt{ln2} \approx 1,67\sigma$. Следовательно, вероятное отклонение $X$ будет: $E = 0,5(k_3 - k_1) = 0,455\sigma$.

## *2.8. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс*

Иногда знание математического ожидания и дисперсии оказывается недостаточным для описания случайной величины. Для характеристики случайной величины кроме вышеуказанных, применяются и моменты, частным случаем которых являются математическое ожидание и дисперсия.

*Начальным моментом* $\nu_k$ порядка $k$ случайной величины $X$ называется математическое ожидание величины $X^k$:

$$\nu_k = M(X^k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, & \text{если } X \text{ дискретная с.в.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, & \text{если } X \text{ непрерывная с.в.} \end{cases}, \qquad (2.8.1)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Очевидно, что всегда $\nu_0 = 1$, а $\nu_1 = M(X)$.

*Центральным моментом* $\mu_k$ порядка $k$ случайной величины $X$ называется математическое ожидание величины $(X - \nu_1)^k$.

$$\mu_k = M(X - \nu_1)^k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \nu_1)^k p_i, & \text{если } X \text{ дискретная с.в.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \nu_1)^k f(x)dx, & \text{если } X \text{ непрерывная с.в.} \end{cases} \qquad (2.8.2)$$

где $к = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Очевидно, что всегда $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$. Таким образом, дисперсия случайной величины - это её центральный момент второго порядка.

Выведем формулу, связывающую центральные моменты с начальными, пользуясь биномом Ньютона:

$$\mu_k = M(X - \nu_1)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i [-M(X)]^{k-i} M(X^i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \nu_1^{k-i} \nu_i \qquad (2.8.3)$$

В частности, для первых четырех моментов выведенная формула дает следующие равенства: $$\begin{cases} \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 \\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 \\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 \end{cases} \qquad (2.8.4)$$

Центральный момент третьего порядка $\mu_3$ характеризует асимметрию закона распределения вероятностей случайной величины. За меру асимметрии принимают величину

$$Sk_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}\ , \qquad (2.8.5)$$

которую называют *асимметрией* (или *скошенностью)* распределения случайной величины. Очевидно, что асимметрия является безразмерной характеристикой. Если $Sk_x = 0$, то закон распределения вероятностей является симметричным. На рис. 2.8.1. приведены графики плотностей распределения вероятностей с отрицательной, нулевой и положительной асимметрией.

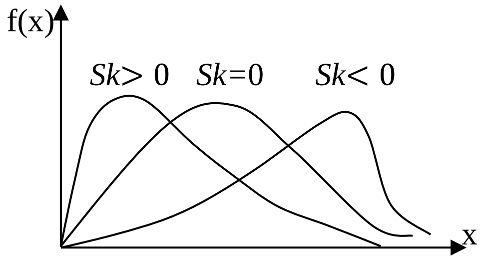


*Рис.* 2.8.1. Законы распределения с разной величиной асимметрии

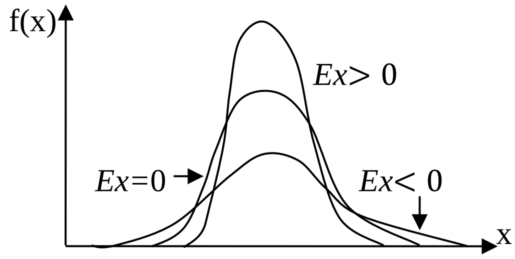


*Рис*. 2.8.2 Законы распределения с разной величиной эксцесса

Центральный момент четвёртого порядка $\mu_4$ характеризует островершинность закона распределения вероятностей случайной величины. За меру островершинности закона распределения принимается величина $Ex_x$, определяемая формулой

$$Ex_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3\ . \qquad (2.8.6)$$

Эта величина называется *эксцессом* закона распределения. На рис. 2.8.2 приведены графики плотностей распределения вероятностей с разными эксцессами. В (2.8.6) деление на $\sigma_x^4$ делается для того, чтобы эксцесс был безразмерной характеристикой. Число 3 вычитается с той целью, чтобы эксцесс нормального распределения, используемого в качестве эталонного, был равен нулю. Плотность нормального распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)\ , \quad -\infty < x < \infty \qquad (2.8.7)$$

Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны константам $m_x$ и $\sigma_x^2$ а отношение $\mu_4/\ \sigma_x^4$ равно 3. Следовательно, $Ex_x = 0$. Таким образом, если $Ex_x < 0$, то вершина распределения менее острая, чем у нормального распределения, если $Ex_x > 0$, то, напротив, вершина более острая.

**Пример 2.8.1.** Определить скошенность и эксцесс для экспоненциального закона распределения: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $x \geq 0$, а для $x < 0$ плотность $f(x) = 0$. Согласно (2.5.2),

$\nu_k = M(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}$, $k = 1, 2, 3,...$. Найдём центральные моменты из (2.8.4):

$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$; $\mu_3 = \nu_3 - 3\,\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = \frac{6}{\lambda^3} - 3\frac{2}{\lambda^2}\,\frac{1}{\lambda} + 2(\frac{1}{\lambda})^3 = \frac{2}{\lambda^3}$; $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = \frac{24}{\lambda^4} - 4\frac{6}{\lambda^3}\frac{1}{\lambda} + 6\frac{2}{\lambda^2}(\frac{1}{\lambda})^2 - 3(\frac{1}{\lambda})^4 = \frac{9}{\lambda^4}$.

Таким образом, для экспоненциального закона $m_x = \nu_1 = 1/\lambda$, $\sigma_x^2 = \mu_2 = 1/\lambda^2$. Следовательно,

$$Sk_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{2}{\lambda^3} \cdot \lambda^3 = 2\ ; \quad Ex_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{9}{\lambda^4} \cdot \lambda^4 - 3 = 6.$$

Заметим, что скошенность и эксцесс не зависят в данном случае от параметра $\lambda$.

**Пример 2.8.2.** Требуется найти математическое ожидание, дисперсию, скошенность и эксцесс дискретной случайной величины $X$, заданной таблично:

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0.1 | 0.2 | 0.35 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.05 |

По формуле (2.6.1), перемножая возможные значения случайной величины на соответствующие вероятности и складывая все произведения, получим математическое ожидание: $m_x = 3{,}3$. Пользуясь формулой (2.8.2) найдем центральные моменты $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$. Все данные для этого представлены в следующей таблице:

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,1 | 0,2 | 0,35 | 0,15 | 0,1 | 0,05 | 0,05 | 1 |
| $x_k - m_x$ | -2,3 | -1,3 | -0,3 | 0,7 | 1,7 | 2,7 | 3,7 | — |
| $(x_k - m_x)p_k$ | -0,23 | -0,26 | -0,105 | 0,105 | 0,17 | 0,135 | 0,185 | 0 |
| $(x_k - m_x)^2 p_k$ | 0,529 | 0,338 | 0,032 | 0,074 | 0,289 | 0,365 | 0,685 | 2,312 |
| $(x_k - m_x)^3 p_k$ | -1,217 | -0,439 | -0,01 | 0,051 | 0,491 | 0,984 | 2,533 | 2,393 |
| $(x_k - m_x)^4 p_k$ | 2,798 | 0,571 | 0,003 | 0,036 | 0,835 | 2,657 | 9,371 | 16,271 |

В последнем столбце таблицы представлены центральные моменты: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2{,}312$, $\mu_3 = 2{,}393$, $\mu_4 = 16{,}271$. Таким образом, дисперсия $D_x = \mu_2 = 2{,}312$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = 1{,}521$. Следовательно,

$$Sk_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{2{,}393}{1{,}521^3} \approx 0{,}68\ ; \qquad Ex_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{16{,}271}{1{,}521^4} - 3 \approx 0{,}044.$$

## 2.9. *Примеры законов распределения дискретных случайных величин*

Некоторые законы распределения вероятностей достаточно часто встречаются в практических задачах. Рассмотрим несколько таких законов.

*Равномерное распределение.* Случайная величина $X$ распределена по равномерному закону, если она может принимать только целые неотрицательные значения от 1 до $n$, а вероятности всех возможных значений одинаковы. Таким образом,

$$P(X = к)= p_{к} = \frac{1}{n}, \quad к = 1,2,...,n \qquad (2.9.1)$$

Основные числовые характеристики:

*математическое ожидание* $m_x = \frac{n+1}{2}$ *; дисперсия* $D_x = \frac{n^2-1}{12}$ ; $Sk_x = 0$; $Ex_x = -1{,}2+\frac{4}{n^2-1}$ .

*Биномиальное распределение (распределение Бернулли).* Случайная величина $X$ распределена по биномиальному закону (или по закону Бернулли), если она может принимать только целые неотрицательные значения от 0 до $n$, а вероятности этих значений определяются формулой:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,2,...n; \quad 0 \le p \le 1, \quad q = 1- p. \qquad (2.9.2)$$

По смыслу случайная величина $X$ является числом появления некоторого события в $n$ независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании постоянна $p$.

Основные числовые характеристики:

*математическое ожидание* $m_x = np$; *дисперсия* $D_x = npq$; *наивероятнейшее значение* s:

$np-q \le s \le np+p$; *скошенность* $Sk_x = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$ ; *эксцесс* $Ex_x = \frac{1-6pq}{npq}$.

Таким образом, скошенность распределения может быть и положительной и отрицательной. Распределение становится симметричным при $p=0{,}5$. Величина эксцесса всегда отрицательна и приближается к нулю при возрастании $n$. Отметим, что при $n \to \infty$ биномиальный закон распределения вероятностей неограниченно приближается к нормальному закону.

Биномиальный закон распределения вероятностей применяется в теории стрельбы, в теории и практике статистического контроля качества продукции, в теории массового обслуживания, в теории надежности и т.д. Этот закон может применяться во всех случаях, когда имеет место последовательность независимых испытаний.

*Распределение Пуассона.* Если число независимых испытаний $n$ устремить к $\infty$, а вероятность $p$ устремить к нулю так, чтобы $np$ стремилось к некоторой постоянной, то биномиальное распределение $X$ будет неограниченно приближаться к распределению Пуассона. Говорят, что случайная величина $X$ распределена по закону Пуассона, если она может принимать только целые неотрицательные значения, а вероятности этих значений определяются формулой:

$$P(X = к)= P_к = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad к = 0,1,2,...; \quad \lambda>0.$$

(2.9.3)

Основные числовые характеристики:

*математическое ожидание* $m_x = \lambda$; *дисперсия* $D_x = \lambda$; *наивероятнейшее значение* s, $\lambda - 1 \le s \le \lambda$; *скошенность* $Sk_x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$; *эксцесс* $Ex_x = \frac{1}{\lambda}$ .

*Геометрическое распределение (Фарри).* Этот закон распределения вероятностей также связан с последовательностью независимых испытаний. Пусть случайной величиной $X$ является число проведённых испытаний до первого осуществления наблюдаемого события. Например, число выстрелов до первого попадания в цель, число проверенных изделий до первого появления бракованного изделия и т.п. Очевидно, что возможными значениями такой случайной величины будут целые числа 0, 1, 2, 3,…, причём эти значения не ограничены (теоретически) сверху. Если $p$ есть вероятность данного события в одном испытании, то

$$P(X = k)= p_k=pq^k\ ,\quad k =0,1,2,3,...\quad 0<p<1,\quad q=1-p \qquad (2.9.4)$$

Эта формула и представляет геометрический закон распределения вероятностей. Заметим, что при любом значении $p$, не равном нулю или единице, наивероятнейшим значением является единица. С ростом $k$ вероятности монотонно убывают.

Основные числовые характеристики:

*математическое ожидание* $m_x = \frac{1}{p}$; *дисперсия* $D_x = \frac{q}{p^2}$ .

## 2.10. Примеры законов распределения непрерывных случайных величин

*Равномерное распределение.* Случайная величина $X$ распределена равномерно в интервале $[a, b]$, если её плотность распределения вероятностей определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}\,, & \text{если} \quad a \le x \le b\,, \\ 0\,, & \text{если} \quad x < a \ \text{ или } \ x > b\,. \end{cases} \qquad (2.10.1)$$

Соответствующая функция распределения вероятностей имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{если} \quad x < a\,, \\ \frac{x-a}{b-a}\,, & \text{если} \quad a \le x \le b\,, \\ 1\,, & \text{если} \quad x > b\,. \end{cases} \qquad (2.10.2)$$

Основные числовые характеристики:

*математическое ожидание* $m_x = \frac{a+b}{2}$; *дисперсия* $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$; *скошенность* $Sk_x = 0$ ; *эксцесс* $Ex_x = -1,2$; *коэффициент вариации* $K_v = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b-a}{a+b}$ .

Графики плотности и функции распределения вероятностей приведены на рис. 2.10.1.

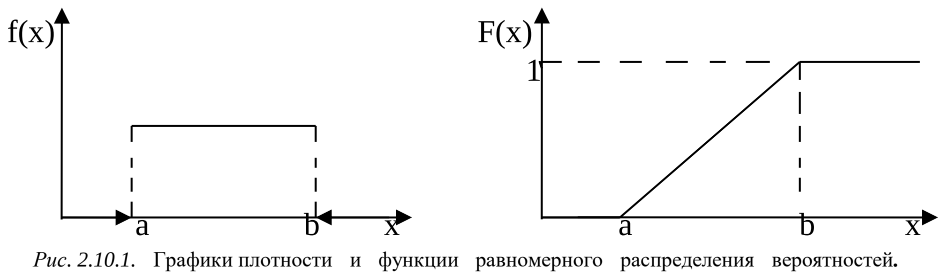


*Рис. 2.10.1.* Графики плотности и функции равномерного распределения вероятностей.

Равномерно распределены ошибки округления при выполнении числовых расчётов, время ожидания автобуса, (трамвая и т.п.) при условии, что интервал движения постоянен и строго выполняется, а пассажир прибывает на остановку в случайный момент времени.

Равномерно распределено и время ожидания начала обслуживания заявки, поступающей в случайный момент в систему массового обслуживания, если обслуживающее устройство включается через равные промежутки времени. При этом предполагается, что все заявки, поступившие к моменту включения обслуживающего устройства, немедленно принимаются к обслуживанию.

Равномерно распределённые величины применяются для получения (генерации) реализаций случайных величин, имеющих другие законы распределения вероятностей. Равномерное распределение является самым простым из непрерывных законов распределения. Поэтому путём определённых операций достаточно легко получить последовательность чисел, которые можно приближённо считать реализациями случайной величины, распределённой равномерно в заданном интервале. Такие числа, а также их функциональные преобразования, называют *псевдослучайными числами*([9]). Существует много алгоритмов получения равномерно распределённых псевдослучайных чисел. Все они работают так, что через некоторый период начинают повторяться те числа, которые уже встречались. В этом и заключается смысл псевдослучайности полученных чисел. С позиций теории вероятностей повторение одной и той же реализации непрерывной случайной величины является событием с нулевой вероятностью. Если же само это событие повторяется многократно, то это очевидный признак того, что имеет место отклонение от равномерного закона распределения. Заметим, что генератор псевдослучайных чисел тем лучше, чем больший период повторения он имеет. В то же время следует заметить, что при практическом использовании полученных чисел они всегда округляются. Следовательно, даже при самом лучшем генераторе псевдослучайных чисел отклонение от заданного закона распределения вероятностей неизбежно. Имеется программа генерации равномерно распределённых псевдослучайных чисел с параметрами $a = 0$ и $b = 1$. Можно приближенно считать, что числа, полученные с помощью такой программы, являются реализациями случайной величины $X$, распределённой равномерно в интервале (0; 1) и имеющей математическое ожидание $m_x = 0{,}5$ и дисперсию $D_x = 1/12$.

*Экспоненциальное (показательное) распределение.* Случайная величина $X$ распределена по экспоненциальному закону, если её плотность распределения вероятностей определяется формулой:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{при} \quad x \geq 0,\ \lambda > 0, \quad \text{и} \quad f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \qquad (2.10.3)$$

Соответствующая функция распределения вероятностей имеет следующий вид:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{при} \quad x \geq 0,\ \lambda > 0, \quad \text{и} \quad F(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \qquad (2.10.4)$$

Графики плотности и функции распределения вероятностей приведены на рис. 2.10.2

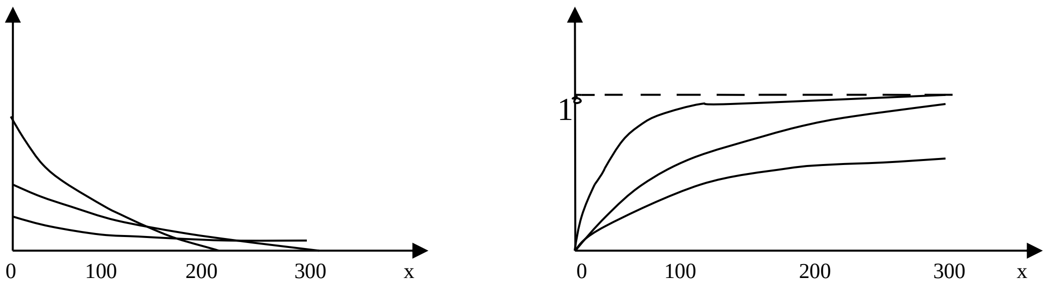


*Рис. 2.10.2.* **Плотность и функция распределения вероятностей случайных величин, распределённых по экспоненциальному закону**

Основные числовые характеристики:

*математическое ожидание* $m_x = 1/\lambda$ ; *дисперсия* $D_x = 1/\lambda^2$; *скошенность* $Sk_x = 2$; *эксцесс* $Ex_x = 6$; *коэффициент вариации* $K_v = 1$.

Экспоненциальное распределение зависит от единственного параметра $\lambda$. Этим фактом определяются некоторые характерные свойства данного распределения. В частности, среднее квадратическое отклонение $\sigma_x$ всегда совпадает с математическим ожиданием, т.е. всегда коэффициент вариации равен единице.

Последовательность реализаций случайной величины, распределённой по экспоненциальному закону, легко получить экспериментально([9]). Пусть Т есть случайная величина, распределённая равномерно в интервале (0; 1), а $t$ - одно из значений этой величины. Тогда число *x,* определяемое формулой

$$x = -\frac{1}{\lambda} \cdot ln(1 - t), \qquad (2.10.5)$$

будет одним из значений случайной величины *X*, распределённой по экспоненциальному закону с параметром $\boldsymbol{\lambda}$. Если $t$ получать с помощью генератора случайных чисел, то $x$ будет реализацией псевдослучайной величины *X*, распределённой по этому закону. Заметим, что эта формула вытекает непосредственно из формулы (2.10.4), если предполагать, что сама функция *F(x)* является случайной величиной равномерно распределённой в интервале (0; 1).

Экспоненциальное (или, иначе, показательное) распределение широко применяется в теории надёжности и в теории массового обслуживания. Оказывается, что случайное время безотказной работы многих технических систем обладает именно экспоненциальным распределением. Кроме того, время восстановления (ремонта) отказавшей технической системы часто также оказывается распределённым по этому закону. В связи с этими фактами экспоненциальное распределение получило относительно широкое применение.

Экспоненциальное распределение имеет определённую связь с распределением Пуассона. Предположим, что мы наблюдаем некоторую последовательность событий, развивающуюся с течением времени. Если интервалы времени между моментами осуществления последовательных событий распределены по экспоненциальному закону с параметром $\boldsymbol{\lambda}$, то число событий, осуществившихся на интервале времени (0; *t*), будет распределено по закону Пуассона с параметром $\boldsymbol{\lambda} t$. В связи с этим закон распределения Пуассона часто называют законом редких событий.

*Нормальное распределение.* Случайная величина *X* распределена по нормальному закону, если её плотность распределения вероятностей определяется следующей формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma > 0, \quad a \in R. \qquad (2.10.6)$$

Соответствующая функция распределения вероятностей имеет следующий вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad (2.10.7)$$

Графики плотности и функции распределения вероятностей приведены на рис. 2.10.3. На рисунке представлены графики двух нормальных законов распределения вероятностей разными числовыми характеристиками.

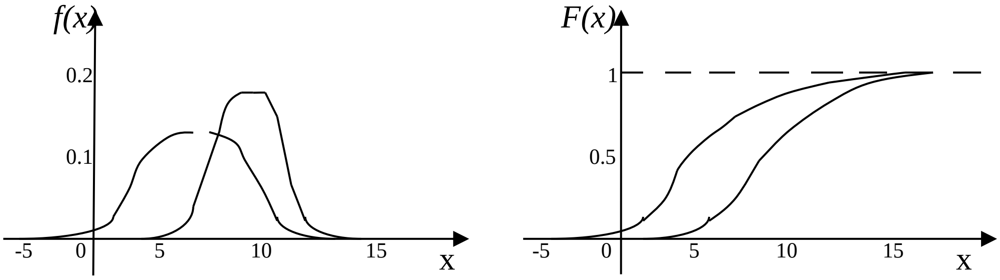


*Рис. 2.10.3.* **Графики плотности и функции распределения вероятностей нормально распределённых случайных величин.**

Основные числовые характеристики:
*математическое ожидание* $m_x = a$; *дисперсия* $D_x = \sigma^2$; *скошенность* $Sk_x = 0$; *эксцесс* $Ex_x = 0$; *коэффициент вариации* $K_v = \sigma/a$.

Отметим, что нормальное распределение симметрично относительно своего математического ожидания. В связи с этим, мода, медиана и математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равны между собой.

Нормальное распределение удобно использовать в качестве эталонного распределения при сравнении случайных величин. Однако для сравнения используется не произвольная нормально распределённая случайная величина, а величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией: $m_x=0$, $D_x=1$. Обозначим плотность и функцию распределения вероятностей такой величины соответственно через $f_0(x)$ и $F_0(x)$. Тогда

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\ , \qquad F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \quad -\infty < x < \infty, \qquad (2.10.8)$$

Делая замену переменной интегрирования в (2.10.7), легко получить связь между функциями $F(x)$ и $F_0(x)$:

$$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \ . \qquad (2.10.9)$$

Таким образом, вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в интервал $[\alpha;\beta)$ определяется формулой:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (2.10.10).$$

Отметим, что преобразование случайной величины по формуле $T=(X-a)/\sigma$ называют операцией центрирования (вычитание математического ожидания) и нормирования (деление на среднее квадратическое отклонение) случайной величины(см.пункт***2.6***.). Очевидно, что центрирование и нормирование можно проводить раздельно.

При решении задач, связанных с нормальным распределением, часто вместо функции распределения вероятностей $F_0(x)$ используется функция Лапласа $\Phi(x)$(см. п. ***1.10*** ):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Очевидно, что $F_0(x)=F_0(0)+ \Phi(x)$. Но $F_0(0)$=0,5. Поэтому

$$F_0(x)=0.5+\Phi(x). \qquad (2.10.11).$$

Таким образом, вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в интервал [α;β) можно находить и по следующей формуле:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) . \qquad (2.10.12).$$

Из (2.10.12) получается «правило трех сигм». Если случайная величина $X$ распределена нормально с параметрами $a$ и σ, то практически достоверно, что абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, т.е. $P(|X-a|<3\sigma) = P(a-3\sigma< X <a+3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 1$.

Другими словами, если случайная величина $X$ имеет нормальный закон распределения с параметрами $a$ и σ, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$.

Выбор формул (2.10.10) или (2.10.12) зависит только от того, какие таблицы имеются в распоряжении. В справочной литературе (а также в учебниках, в сборниках задач и т.п.) можно найти таблицы значений как функции распределения вероятностей $F_0(x)$, так и функции Лапласа $\Phi(x)$. Заметим, что функция $\Phi(x)$ является нечётной функцией, а $F_0(x)$ является чётной функцией. Поэтому обычно приводятся таблицы значений этих функций только для положительных значений аргументов.

Нормально распределённые случайные величины встречаются очень часто в практических задачах. Это связано с тем, что нормально распределённая случайная величина является следствием аддитивного (суммарного) взаимодействия большого числа других величин (или факторов), каждая из которых вносит малую долю в общий результат. Вообще при определённых условиях закон распределения суммы случайных величин при увеличении числа слагаемых неограниченно приближается к нормальному закону. Об этом говорит центральная предельная теорема, которая формулируется в пункте ***4***. Частным случаем этой теоремы являются локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа, рассмотренные в первой теме. Искусственное получение реализаций нормально распределённой случайной величины также опирается на центральную предельную теорему. Оказывается, что уже двенадцать одинаково равномерно распределённых случайных величин в сумме представляют величину, закон распределения которой достаточно близок к нормальному закону. Если $t_i$, $i$ =1, 2,...,12, есть реализации случайной величины, распределённой равномерно в интервале (0; 1), то величина

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{12}(t_i - 0{,}5) \qquad (2.10.13)$$

будет реализацией центрированной и нормированной случайной величины, распределённой приближенно по нормальному закону([9]).

## 3. Многомерные случайные величины

### *3.1. Определение многомерных случайных величин*

На одном и том же пространстве элементарных событий может быть определена не один, а несколько случайных величин. Например, когда объект характеризуется несколькими случайными параметрами. Так, при вероятностном моделировании структуры расходов затраты случайно выбранной семьи на питание, обувь, одежду, транспорт и т.д. являются случайными величинами, определенными на одном пространстве элементарных событий. Совокупность $n$ случайных величин принято называть $n$-мерной случайной величиной или системой $n$ случайных величин или $n$-мерным вектором. В дальнейшем $n$-мерную случайную величину будем обозначать $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, где $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – отдельные случайные величины. В частности $(X, Y)$ – двухмерная случайная величина, $(X, Y, Z)$ – трёхмерная случайная величина и т.д. Очевидно, что $n$-мерную случайную величину можно трактовать как вектор, компоненты которого являются случайными величинами. Двухмерная случайная величина представляет собой вектор на координатной плоскости XOY, а трёхмерная случайная величина – вектор в трёхмерном пространстве.

Для определения типа $n$-мерной случайной величины достаточно указать типы составляющих её компонент: все компоненты случайной величины относятся к одному и тому же типу. На многомерные случайные величины распространяются почти без изменений основные определения, относящиеся к одномерным случайным величинам. Почти все вопросы, касающиеся изучения $n$-мерных случайных величин, можно рассмотреть на примере двухмерной случайной величины.

Случайная величина $(X,Y)$ называется дискретной, если компоненты $X$ и $Y$ принимают конечное или счетное число значений $x_i$, $y_j$ соответственно, причем, случайная величина $(X, Y)$ каждую пару значений $(x_i, y_j)$ принимает с вероятностью $p_{ij}$, т.е. $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, так что: $\sum_{i=1}\sum_{j=1} p_{ij} = 1$. Соответствие между значениями $(x_i, y_j)$ случайной величины $(X, Y)$ и соответствующими вероятностями $p_{ij}$ называется законом распределения вероятностей двухмерной дискретной случайной величины $(X, Y)$. Пусть в случайной величине $(X, Y)$ возможными значениями компоненты $X$ являются значения $x_1, x_2, \ldots, x_s$, а возможными значениями $Y$ являются $y_1, y_2, \ldots, y_q$. Для дискретных величин часто применяют табличный способ задания:

| $x_i$ \ $y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_q$ | $p_{i*}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | … | $p_{1q}$ | $p_{1*}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | … | $p_{2q}$ | $p_{2*}$ |
| … | … | … | … | … | |
| $x_s$ | $p_{s1}$ | $p_{s2}$ | … | $p_{sq}$ | $p_{s*}$ |
| $p_{*j}$ | $p_{*1}$ | $p_{*2}$ | … | $p_{*q}$ | 1 |

В первом столбце перечислены возможные значения случайной величины $X$, а в первой строке – возможные значения случайной величины $Y$. На пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца указана вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение $x_i$ и, одновременно, случайная величина $Y$ примет значение $y_j$, т.е. $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Суммируя все вероятности $p_{ij}$ по одному из индексов, сохраняя постоянным другой индекс, можно получить закон распределения вероятностей для одномерной величины:

$$P(X = x_i)=\sum_{j=1}^{q} p_{ij}\ ,\quad i=1,2,\ldots,s, \qquad P(Y = y_j)=\sum_{i=1}^{s} p_{ij}\ ,\quad j=1,2,\ldots,q.$$

Эти вероятности будем обозначать соответственно $p_{i*}$ и $p_{*j}$. Символ «звёздочка» означает, что по данному индексу проведено суммирование вероятностей двухмерной случайной величины. Вероятности $p_{i*}$ и $p_{*j}$ записаны в последнем столбце и в последней строке таблицы. Очевидно, что обычное условие нормировки вероятностей для $p_{i*}$ и $p_{*j}$ сохраняется, т.е. $\sum_{i=1}^{s} p_{i*} = 1$; $\sum_{j=1}^{q} p_{*j} = 1$.

Из этого следует, что сумма всех вероятностей $p_{ij}$ всегда будет равна единице *(условие нормировки двухмерных вероятностей):*

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{q} p_{ij} = 1 \qquad (3.1)$$

Аналогично можно задавать и случайные величины большей размерности. С ростом размерности процесс задания случайной величины становится громоздким. Так, для трёхмерной случайной величины потребуется трёхмерная таблица, т. е. несколько таблиц представленного выше типа.

**Пример 3.1.** Двухмерная случайная величина задана табличным способом.

| $x_i$ \ $y_j$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,03 | 0,04 | 0,03 | 0,03 | 0,02 |
| 4 | 0,04 | 0,06 | 0,07 | 0,05 | 0,03 |
| 6 | 0,05 | 0,08 | 0,09 | 0,08 | 0,05 |
| 8 | 0,04 | 0,08 | 0,06 | 0,04 | 0,03 |

Требуется определить одномерные законы распределения случайных величин *X* и *Y*. Вычислить вероятность *P* того, что случайная величина *X* примет значение из интервала (3; 7) и, одновременно, *Y* примет значение из интервала [0; 3).

Для определения вероятностей $p_{i*}$ и $p_{*j}$ нужно просуммировать заданные в таблице вероятности соответственно по строкам и по столбцам. Суммируя по строкам, получим закон распределения вероятностей случайной величины *X* в табличной форме, суммируя по столбцам, получим закон распределения вероятностей случайной величины *Y*.

| $x_i$ **ч** | 3 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{i*}$ | 0,15 | 0,25 | 0,35 | 0,25 |

| $y_j$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_{*j}$ | 0,16 | 0,26 | 0,25 | 0,20 | 0,13 |

В интервал (3; 7) попадает всего два возможных значений величины *X*: $x = 4$ и $x = 6$. В интервал [0; 3) попадает три возможных значения величины *Y*: $y = 0$, $y = 1$ и $y = 2$. Таким образом, в указанную в условии задачи область попадает всего шесть точек: (4; 0), (4; 1), (4; 2), (6; 0), (6; 1) и (6; 2). Искомая вероятность равна сумме вероятностей этих точек: $P = 0{,}06 + 0{,}07 + 0{,}05 + 0.08 + 0{,}09 + 0{,}08 = 0{,}43$.

### *3.2. Функция распределения вероятностей многомерных случайных величин*

Универсальным способом задания *n*-мерной случайной величины является задание её функции распределения вероятностей. *Функцией распределения n-мерной случайной величины* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n$, т.е.

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

*Функцией распределения вероятностей двухмерной случайной величины* (*X*, *Y*) в точке (*x*, *y*) называется вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее, чем *x*, а случайная величина *Y* одновременно примет значение меньшее, чем *y*, т.е.

$$F(x, y) = P(X < x,\ Y < y). \qquad (3.2.1)$$

Геометрически функция распределения $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки $(X, Y)$ в бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки $M(x, y)$. Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются - это означает, что функция распределения непрерывна слева по каждому из аргументов.

В случае дискретной двумерной случайной величины её функция распределения определяется по формуле:

$$F(x, y) = \sum_i \sum_j p_{ij}\ ,$$

где суммирование вероятностей распространяется на все $i$, для которых $x_i < x$, и на все $j$, для которых $y_j < y$.

Отметим свойства функции распределения двумерной случайной величины, аналогичные свойствам функции распределения одномерной случайной величины.

**1.** Функция распределения $F(x, y)$ есть неотрицательная функция, заключённая между нулём и единицей, т.е. $0 \le F(x, y) \le 1$.

**2.** Функция распределения $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов, т.е.

$$\text{при } x_2 > x_1 \quad F(x_2, y) \ge F(x_1, y),$$
$$\text{при } y_2 > y_1 \quad F(x, y_2) \ge F(x, y_1).$$

**3.** Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, функция распределения $F(x, y)$ равна нулю, т.е. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

**4.** Если один из аргументов обращается в $+\infty$, функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_X(x),$$
$$F(+\infty, y) = F_Y(y),$$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ - функции распределения случайных величин $X$ и $Y$, т.е. $F_X(x) = P(X < x)$, $\quad F_Y(y) = P(Y < y)$.

**5.** Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице:

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

**6.** Вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение из интервала $[a, b)$, а величина $Y$ - из интервала $[c, d)$, равна:

$$P(a \le X < b, c \le Y < d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \qquad (3.2.2)$$

Стремление аргументов к $\infty$ относится к тому случаю, когда возможные значения $(x, y)$ величины $(X, Y)$ располагаются на всей координатной плоскости. Если область определения случайной величины ограничена, то вместо бесконечности нужно использовать граничные значения переменных $x$ и $y$, соответствующие этой области. Пусть область возможных значений $(x, y)$ такова, что $\alpha \le x < \beta$ при любом значении $y$ и $\delta \le y < \gamma$ при любом значении $x$ (область не обязательно прямоугольная). Тогда свойства функции распределения **3,4,5** можно записать так: $F(\alpha, y) = F(x, \delta) = F(\alpha, \delta) = 0$; $\quad F(x, \gamma) = F_X(x)$, $F(\beta, y) = F_Y(y)$, $\quad F(\beta, \gamma) = 1$;

Графиком двухмерной функции распределения является поверхность. Для дискретных величин эта поверхность имеет ступенчатую форму. Для непрерывных величин график не имеет разрывов в области определения функции распределения.

### *3.3. Плотность распределения вероятностей двухмерной случайной величины*

Закон распределения вероятностей двухмерной непрерывной случайной величины ($X$, $Y$) задается кроме функции распределения еще и с помощью функции плотности вероятностей $f(x, y)$.

Пусть функция распределения вероятностей $F(x, y)$ двухмерной случайной величины ($X$, $Y$) является непрерывной и дифференцируемой. Вероятность попадания случайной величины ($X$, $Y$) в прямоугольник со сторонами $\Delta x$ и $\Delta y$, вершины которого являются точки $A(x; y)$, $B(x; y+\Delta y)$, $C(x+\Delta x; y+\Delta y)$ и $D(x+\Delta x; y)$, будет: $P(x \le X < x + \Delta x,\ \ y \le Y < y + \Delta y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) + F(x, y)$.
Поделив эту вероятность на $\Delta x \Delta y$ и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x,\ \ y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big[\lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y)}{\Delta y}$$

$$- \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}\Big] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big[\frac{\partial F(x+\Delta x, y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\Big].$$

Последний предел равен, очевидно, второй смешанной частной производной. Этот предел называют *плотностью распределения вероятностей* $f(x, y)$ *двухмерной случайной величины* ($X$, $Y$), или *двухмерной плотностью распределения вероятностей.*

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \qquad (3.3.1)$$

Плотность распределения вероятностей является удобной формой задания закона распределения вероятностей случайных величин, но применение её ограничено только непрерывными случайными величинами. Графиком двумерной плотности распределения вероятностей является поверхность, расположенная над координатной плоскостью XOY.

Сформулируем свойства двумерной плотности распределения вероятностей.

**1.** Всегда $f(x, y) \ge 0$.

**2.** Непосредственно из (3.3.1) вытекает следующее равенство:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,dv\,du. \qquad (3.3.2)$$

**3.** Используя свойство 2 и, учитывая, что $F(\infty, \infty) = 1$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1\ . \qquad (3.3.3)$$

**4.** Вероятность попадания случайной точки ($X$, $Y$) в произвольную область $D$ равна интегралу от плотности распределения вероятностей по этой области:

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy \qquad (3.3.4)$$

Если $D$ прямоугольник с вершинами в точках $A(a; c)$, $B(a; d)$, $C(b; d)$ и $E(b; c)$, то

$$P\{(X, Y) \in D\} = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy \qquad (3.3.5)$$

**5.** Из (3.3.2) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = f_X(x) \qquad \text{и} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx = f_Y(y) \qquad (3.3.6)$$

Свойство 3 представляет *условие нормировки вероятностей*. Если $D$ охватывает все возможные значения компонент $X$ и $Y$, то (3.3.3) запишется так:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 1 \qquad (3.3.7)$$

Это означает, что объём тела, заключённого между поверхностью $z = f(x, y)$ и координатной плоскостью XOY, всегда равен единице.

Свойство 5 является общим правилом перехода от плотности распределения вероятностей размерности $n$ к плотностям распределения вероятностей размерности $n$ - 1. Для такого перехода достаточно $n$-мерную плотность распределения проинтегрировать по одному из аргументов в пределах от $-\infty$ до $\infty$.

### *3.4. Условные законы распределения. Статистическая зависимость*

Зная плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ двухмерной случайной величины $(X, Y)$, можно определить одномерные плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$, пользуясь свойством 5. При таком переходе вся информация о характере связи между величинами $X$ и $Y$ будет потеряна. Обратный переход от одномерных плотностей $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ к двухмерной плотности $f(x, y)$ оказывается невозможным.

Для установления связи между двухмерной и одномерными плотностями распределения вероятностей вводится понятие условной плотности распределения вероятностей. *Условной плотностью распределения вероятностей* случайной величины $Y$ по отношению к величине $X$ называют плотность распределения вероятностей величины $Y$, вычисленную при условии, что величина $X$ приняла значение $x$, и обозначают $f(y|x)$. Можно показать, что для двух непрерывных величин $X$ и $Y$:

$$f(x, y) = f(y \mid x) \cdot f_X(x) \quad \text{и} \quad f(x, y) = f(x \mid y) \cdot f_Y(y) \qquad (3.4.1)$$

Двухмерная плотность распределения вероятностей равна произведению условной плотности распределения вероятности одной из этих величин по отношению к другой на безусловную плотность распределения вероятности второй величины. Для восстановления двухмерной плотности необходимо знать одну из условных плотностей и соответствующую одномерную плотность. Формулы (3.4.1) называют формулами умножения плотностей распределения вероятностей. Их структура совпадает со структурой формулы умножения вероятностей событий.

Условные плотности распределения вероятностей содержат всю информацию о зависимости между случайными величинами. Может оказаться, что условная плотность полностью совпадает с безусловной плотностью. В таком случае говорят, что данные величины являются *статистически независимыми*. Заметим, что если величина $Y$ не зависит от величины $X$, то и $X$ не зависит от $Y$. Действительно, пусть $f(y \mid x) = f_Y(y)$. Левые части равенств (3.4.1) равны, поэтому равны и правые части, т.е.

$$f(x|\, y)\cdot f_Y(y) = f(y|x)\cdot f_X(x) \qquad \text{или} \qquad f(x|\, y) = (f(y|x)\cdot f_X(x))/(f_Y(y)) = f_X(x).$$

Отсюда следует, что если $f(y \mid x) = f_Y(y)$, то $f(x \mid y) = f_X(x)$.

Если условные плотности распределения вероятностей не равны безусловным плотностям, то случайные величины $X$ и $Y$ являются *статистически зависимыми*. Формулы умножения плотностей распределения (3.4.1) справедливы в любом случае. Для статистически независимых величин $X$ и $Y$ формулы умножения плотностей распределения сводятся к одной:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y). \qquad (3.4.2)$$

Это равенство является признаком независимости случайных величин. Из записанных соотношений вытекает следующая формула для определения условных плотностей распределения вероятностей по двухмерной плотности:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy} \qquad \text{и} \qquad f(x|\, y) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}\,. \qquad (3.4.3)$$

Аналогично вводится понятие условной плотности распределения вероятностей для многомерных величин более высокой размерности.

Пусть $(X, Y)$ дискретная случайная величина. Возможными значениями компоненты $X$ являются значения $x_1, x_2, ..., x_s$, а возможными значениями $Y - y_1, y_2, ..., y_q$. Заданы вероятности $p_{ij}= P(X = x_i, Y = y_j)$. Условный закон распределения вероятностей величины $X$ при условии, что величина $Y$ приняла значение $y_j$, будет иметь следующий вид:

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{s} p_{ij}} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}}, \quad i=1,2,\cdots,s . \qquad (3.4.4)$$

Здесь изменяется индекс $i$, но не изменяется индекс $j$. Заметим, что по своему смыслу эта формула полностью эквивалентна второй формуле из (3.4.3). Другими словами, любая строка (любой столбец) в таблице задания вероятностей $p_{ij}$ (см. п. 3.1), поделённая на сумму вероятностей этой строки (этого столбца), представляет собой условный закон распределения вероятностей одной из величин по отношению к фиксированному значению другой величины. Если, например, все вероятности второй строки таблицы поделить на $p_{2*}$, то получим условный закон распределения случайной величины $Y$ при условии, что величина $X$ приняла значение $x_2$.

Для дискретных величин статистическая зависимость определяется аналогично. Если условное распределение вероятностей одной величины по отношению к другой совпадает с безусловным законом, т.е. $P(X = x_i \mid Y = y_j) = p_{i*}$, $i = 1, 2, ..., s$, $j = 1, 2, ..., q$, то величины $X$ и $Y$ являются статистически независимыми. Если это условие не выполняется, то величины являются статистически зависимыми.

**Пример 3.4.** Задана плотность распределения вероятностей двухмерной случайной величины $(X, Y)$: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{при } x^2+y^2<R^2, \\ 0, & \text{при } x^2+y^2 \ge R^2. \end{cases}$, $R> 0$.

Показать, что случайные величины $X$ и $Y$ являются зависимыми.

Случайные величины $X$ и $Y$ будут зависимыми, если $f(x|\,y) \neq f_X(x)$. Найдём $f_X(x)$:

$$f_x(x)= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, \qquad -R<x<R.$$

Здесь при расстановке пределов интегрирования было учтено, что плотность $f(x, y)$ равна нулю вне круга радиуса $R$. В силу симметрии плотности $f(x, y)$, плотность $f_y(y)$ имеет такую же структуру: $f_Y(y) = \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}$ $-R<y<R$. Следовательно,

$$f(x|\,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^2}{2\sqrt{R^2-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}} \neq f_x(x)= \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}.$$

Это доказывает, что $X$ и $Y$ являются зависимыми величинами. Отметим, что условные плотности $f(x \mid y)$ и $f(y \mid x)$ также имеют одинаковые структуры. Следует иметь в виду, что они определены только внутри круга: $x^2 + y^2 < R^2$. Вне этого круга они равны нулю.

Для доказательства существования зависимости между величинами необязательно находить условные плотности распределения вероятностей. Достаточно убедиться, что $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_y(y)$. В данном случае это неравенство очевидно.

### *3.5. Числовые характеристики многомерных случайных величин.*

### *Ковариационный момент и коэффициент корреляции*

Зная двухмерную случайную величину ($X$, $Y$) можно говорить о математических ожиданиях отдельных компонент $m_x$ и $m_y$, о их дисперсиях $D_x$ и $D_y$ и т. п. Однако знание характеристик изолированных компонент не позволяет делать выводы о существовании статистической связи между этими компонентами и о характере этой связи. При изучении многомерных величин дополнительно привлекают такие характеристики, которые отражают статистическую связь. К таким характеристикам относятся смешанные моменты случайных величин.

Пусть для двухмерной случайной величины ($X$, $Y$) задана плотность распределения вероятностей $f(x, y)$. *Начальным моментом* $\nu_{gh}$ порядка $\kappa = g + h$ двухмерной величины ($X$, $Y$) называется математическое ожидание произведения $X^g \cdot Y^h$:

$$\nu_{gh} = M(X^g \cdot Y^h) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^g y^h f(x,y)dxdy \qquad (3.5.1)$$

Если ($X$, $Y$) двухмерная дискретная случайная величина с возможными значениями $(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, ..., s$, $j = 1, 2, ..., q$, и с вероятностями $p_{ij}$, то

$$\nu_{gh} = M(X^g \cdot Y^h) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{q} x_i^g y_j^h p_{ij} \qquad (3.5.2)$$

В (3.5.1) и (3.5.2) $g$ и $h$ - целые числа, $g \geq 0$, $h \geq 0$, $g + h = \kappa$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ .

Число моментов порядка $\kappa$ будет равно $\kappa + 1$. При $\kappa = 0$ имеется всего один момент $\nu_{00}$ который всегда равен единице (условие нормировки вероятностей). При $\kappa = 1$ имеется два момента $\nu_{10}$ и $\nu_{01}$ которые совпадают с математическими ожиданиями величин $X$ и $Y$: в самом деле:

$\nu_{10} = m_x = M(X^1 \cdot Y^0) = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy]dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = m_x$,

и таким же образом: $\nu_{01} = m_y$.

Точка $(m_x; m_y)$ называется *математическим ожиданием*(*центром рассеивания)* двухмерной случайной величины ($X$, $Y$) .

Моменты $\nu_{0k}$ и $\nu_{k0}$ являются моментами k-ого порядка соответственно величин $Y$ и $X$. Остальные моменты при $\kappa > 1$ представляют собой смешанные моменты, которые и характеризуют статистическую связь между компонентами $X$ и $Y$.

Для анализа статистической связи удобнее использовать центральные моменты. *Центральным моментом* $\mu_{gh}$ порядка $\kappa = g + h$ двухмерной случайной величины ($X$, $Y$) называется математическое ожидание произведения $(X - m_x)^g \cdot (Y - m_y)^h$:

$$\mu_{gh} = M[(X-m_x)^g \cdot (Y-m_y)^h] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^g (y-m_y)^h f(x,y)dxdy. \qquad (3.5.3)$$

*Если (X, Y)* двухмерная дискретная случайная величина с возможными значениями $(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, ..., s$, $j = 1, 2, ..., q$, и с вероятностями $p_{ij}$, то

$$\mu_{gh} = M[(X-m_x)^g \cdot (Y-m_y)^h] = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{q} (x_i - m_x)^g (y_j - m_y)^h p_{ij}. \qquad (3.5.4)$$

В этих формулах $g$ и $h$ - целые числа, $g \geq 0$, $h \geq 0$, $g + h = \kappa$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots$. Вычисление начальных моментов $\nu_{gh}$ почти всегда менее трудоёмко, чем вычисление центральных моментов $\mu_{gh}$ . Поэтому для определения центральных моментов часто применяют формулы связи между начальными и центральными моментами(такой формулой для одномерного случая является формула (2.8.3) п.**2.8)**.Смешанный момент $\mu_{11}$ имеет первостепенное значение при изучении зависимости между случайными величинами. Этот момент принято называть *ковариационным моментом, моментом связи* или просто *ковариацией* и обозначать через $C_{xy}$. Ковариационный момент характеризует линейную связь между рассматриваемыми величинами и обладает следующими свойствами:

**1.** $C_{xy} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$.

В самом деле: пользуясь свойствами математического ожидания, получим: $C_{xy} = M[(X - m_x)\cdot(Y - m_y)] = M(XY - m_xY - m_yX + m_xm_y) = M(XY) - M(X)\cdot M(Y) = \nu_{11} - \nu_{10}\,\nu_{01}$.

**2.** Если $X$ и $Y$ являются статистически независимыми величинами, то ковариационный момент равен нулю.

Действительно, если $X$ и $Y$ независимы, то $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ и, следовательно,

$$C_{xy}=M[(X-m_x)(Y-m_y)]= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)\left(y-m_y\right)f(x,y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)f_X(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)f_Y(y)dy = \mu_{x1}\cdot\mu_{y1}=0,$$

где $\mu_{x1}$ и $\mu_{y1}$ есть центральные моменты первого порядка величин соответственно $X$ и $Y$, которые всегда равны нулю.

**3.** $C_{xy}= C_{yx}$ .

**4.** Момент $\mu_{20}$ является, очевидно, дисперсией $D_x$ случайной величины $X$, а момент $\mu_{02}$ - дисперсией $D_y$ величины $Y$: $C_{xx} = \mu_{20} = D_x$ ; $C_{yy} = \mu_{02} = D_y$ .

**5.** $C_{(x+a)(y+b)} = C_{xy}$ .

**6.** $C_{(ax+by)z} = aC_{xz} + bC_{yz}$ , где $a$ и $b$ постоянные.

Из свойства **1.** вытекает одно очень важное свойство математических ожиданий. Если ковариационный момент (или коэффициент корреляции) равен нулю, то математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Справедливо и обратное утверждение. Однако из равенства $M(XY) = M(X)\cdot M(Y)$ ещё не следует, что величины $X$ и $Y$ являются статистически независимыми.

По свойству **2.,** если величины $X$ и $Y$ являются статистически независимыми, то $C_{xy} = 0$. Однако обратное утверждение не является верным, т.е. если $C_{xy} = 0$, то это ещё не значит, что данные величины являются статистически независимыми. Равенство нулю ковариационного момента означает факт, что между величинами отсутствует линейная связь. Однако может существовать нелинейная связь, которая может выступать в разных формах. Форма связи при $C_{xy} = 0$ определяется моментами более высокого порядка. Например, момент $\mu_{21}$ определяет параболическую связь между величиной $Y$ и величиной $X$, момент $\mu_{31}$ - кубическую связь и т.д.

Рассмотрим подробнее вопрос о линейной связи между двумя величинами. Предположим, что между случайными величинами $X$ и $Y$ существует статистическая зависимость, причём точно известно, что эта зависимость линейная. Тогда справедливо равенство $Y = aX + b + \zeta$. В этом равенстве слагаемое $aX + b$ представляет собой компоненту величины $Y$, линейную относительно величины $X$, причём $a$ и $b$ являются постоянными коэффициентами. Слагаемое $\zeta$ представляет собой некоторую случайную величину, не зависящую от $X$. Пусть $m_x$ и $m_\zeta$ есть математические ожидания величин $X$ и $\zeta$, а $D_x$ -дисперсия величины $X$. Тогда математическое ожидание величины $Y$ будет равно $m_y = M(aX + b + \zeta) = am_x + b + m_\zeta$. Следовательно, $C_{xy} = M[(Y - m_y)(X - m_x)] = M[(aX + b + \zeta - am_x - b - m_\zeta)(X - m_x)] = M[a(X - m_x) + (\zeta - m_\zeta)](X - m_x) = aM(X - m_x)^2 + M[(\zeta - m_\zeta)(X - m_x)] = aD_x + C_{\zeta x}$. Но $C_{\zeta x} = 0$, так как, по предположению, связь между величинами $X$ и $\zeta$, отсутствует. Таким образом, $C_{xy} = aD_x$. Это означает, что ковариационный момент пропорционален коэффициенту, обеспечивающему линейную связь между величинами. Если линейная связь отсутствует, то $a = 0$ и ковариационный момент также обращается в нуль. Поэтому ковариационный момент характеризует линейную связь между рассматриваемыми величинами $X$ и $Y$.

Изучение линейной связи между величинами является наиболее простой и, в то же время, неизбежной задачей при исследовании статистической зависимости между величинами. Именно поэтому придаётся большое значение определению ковариационного момента. При изучении свойств совокупности $n$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ используется понятие *ковариационной матрицы* - матрицы, состоящей из ковариационных моментов попарно рассматриваемых величин из данной совокупности:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.5.5}$$

Здесь $C_{ij}$ - ковариационный момент между величинами $X_i$ и $X_j$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$. Для унификации записи введено обозначение: $C_{ii}=\sigma_i^2$. Последнее означает, что дисперсия $\sigma_i^2$ формально рассматривается как ковариационный момент между $X$ и $X$. Ковариационная матрица даёт полное представление о линейной связи между величинами рассматриваемой совокупности. Анализ матрицы позволяет выявить те компоненты, между которыми линейная зависимость наиболее существенна. Определитель ковариационной матрицы $C$ называется обобщенной дисперсией. Обобщенную дисперсию можно использовать как меру рассеяния $n$-мерной случайной величины. Ковариационная матрица $C$ и вектор средних $n$-мерной случайной величины $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$: $M(X) = [M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n)]$ являются основными числовыми характеристиками случайного вектора $X$.

Величина ковариационного момента $C_{xy}$ зависит от дисперсий $\sigma_x^2$ и $\sigma_y^2$ величин $X$ и $Y$. Поэтому затруднительно судить о силе линейной связи между величинами, опираясь на значение коэффициента $C_{xy}$. Если, например, $C_{xy} > C_{uv}$, то ещё нельзя утверждать, что линейная связь между $Y$ и $X$ сильнее, чем между величинами $V$ и $U$. Это связано с тем, что у пары величин $Y$ и $X$ дисперсии могут значительно отличаться от дисперсий пары $V$ и $U$. С целью устранения этого неудобства для измерения силы линейной связи был введён *коэффициент корреляции:*

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{3.5.6}$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной, не зависящей от дисперсий $\sigma_x^2$ и $\sigma_y^2$, причём всегда выполняется неравенство:

$$|r_{xy}| \le 1. \tag{3.5.7}$$

Если $|r_{xy}| = 1$, то имеется функциональная линейная связь между величинами $Y$ и $X$, т.е. $Y = aX + b$, где $a$ и $b$ - некоторые постоянные коэффициенты. Если $r_{xy} = -1$, то $a < 0$, если $r_{xy} = 1$, то $a > 0$. Другими словами, при $r_{xy} = -1$ имеем монотонно убывающую функцию связи между $Y$ и $X$, а при $r_{xy} = 1$ - монотонно возрастающую функцию.

Если $r_{xy} = 0$, то линейная связь между величинами $Y$ и $X$ отсутствует. Последнее означает, что или величины $Y$ и $X$ являются статистически независимыми, или между ними существуют только нелинейные виды связей.

При рассмотрении совокупности $n$ случайных величин ($n > 2$) используется *корреляционная матрица* - матрица, составленная из коэффициентов корреляции:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5.8}$$

Корреляционная матрица более наглядно представляет линейные связи между рассматриваемыми величинами. Из свойства ковариационного момента **3.** и определения коэффициента корреляции следует, что ковариационная (3.5.5) и корреляционная (3.5.8) матрицы являются симметричными относительно главных диагоналей.

Если коэффициент $r_{xy}$ между величинами $X$ и $Y$ равен нулю, то говорят, что эти случайные величины являются *некоррелированными.* Если $r_{xy} \neq 0$, величины называют *коррелированными.* Статистически независимые величины являются некоррелированными. Обратное утверждение в общем случае не является верным.

### 3.6. Условные числовые характеристики. Регрессия. Корреляционное отношение

Для исследования двухмерной случайной величины ($X$, $Y$) рассматривается не только ее совместное распределение, но и два условных закона распределения вероятностей:
условный закон для величины $Y$ по отношению к $X$ и условный закон распределения величины $X$ по отношению к $Y$. Числовые характеристики, найденные на основе условных законов распределения вероятностей, называются *условными числовыми характеристиками* случайных величин. Можно выделить две группы условных числовых характеристик: условные числовые характеристики случайной величины $Y$ по отношению к $X$ и условные числовые характеристики случайной величины $X$ по отношению к $Y$. При анализе зависимости между величинами часто ограничиваются рассмотрением *условного математического ожидания и условной дисперсии.*

Условное математическое ожидание величины $Y$ по отношению к $X$ будем обозначать через $m_y(x)$, а условное математическое ожидание величины $X$ по отношению к $Y$ - через $m_x(y)$. Условные дисперсии будем обозначать соответственно через $D_y(x)$ и $D_x(y)$.

Для непрерывных случайных величин ($X$, $Y$)

$$m_y(x)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(y|x)dy \quad \text{и} \quad m_x(y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x|y)dx. \qquad (3.6.1)$$

Для дискретных величин ($X$, $Y$) с вероятностями $p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_i)$, $i = 1, 2, ..., s$, $j = 1, 2, ..., q$, условные математические ожидания определяются формулами (см. (3.4.4)):

$$m_y(x_i)=\frac{1}{p_{i*}}\sum_{j=1}^{q} y_j\, p_{ij} \quad \text{и } m_x(y_j)=\frac{1}{p_{*j}}\sum_{i=1}^{s} x_i\, p_{ij} \qquad (3.6.2)$$

Условное математическое ожидание имеет большое значение при исследовании статистической зависимости между величинами. Если нужно предсказывать ожидаемые значения величины $Y$ по известным значениям величины $X$, то следует использовать условное математическое ожидание. Функция

$$y=m_y(x) \qquad (3.6.3)$$

называется *регрессией* величины $Y$ на $X$, а график этой функции - *линией регрессии* $Y$ на $X$. Оказывается, что применение этой функции для прогнозирования ожидаемых значений $Y$ обеспечивает минимальную среднеквадратическую ошибку прогнозирования. Пусть для прогнозирования $Y$ применяется некоторая функция $y = \varphi(x)$. Тогда средний квадрат ошибки прогнозирования будет равен $M([Y - \varphi(X)]^2)$. При любых законах распределения минимум этой величины достигается в случае $\varphi(x) = m_y(x)$.

Аналогично определяется регрессия величины $X$ на $Y$: $x = m_x(y)$. Линии регрессии $y = m_y(x)$ и $x = m_x(y)$ расположены на координатной плоскости XOY симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. В связи с этим регрессии $y = m_y(x)$ и $x = m_x(y)$ являются взаимно обратными функциями.

Регрессия не охватывает всю глубину статистической связи между величинами. Может оказаться, что $m_y(x) = m_y$. В таком случае регрессия оказывается бесполезной с точки зрения возможного прогнозирования. Однако нельзя делать вывод, что величина $X$ не влияет на $Y$. Действительно, величина $X$, не оказывая влияния на математическое ожидание величины $Y$, может существенно влиять на её дисперсию или на её моменты более высоких порядков. Для уточнения характера влияния одной величины на другую используются условные моменты более высоких порядков, в частности условная дисперсия.

Для непрерывных случайных величин ($X$, $Y$)

$$D_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty}[y - m_y(x)]^2 \cdot f(y \mid x)dy; \quad D_x(y) = \int_{-\infty}^{\infty}[x - m_x(y)]^2 \cdot f(x \mid y)dx. \qquad (3.6.4)$$

Аналогичные формулы для дискретных величин ($X$, $Y$) с вероятностями $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1, 2, ..., s$; $j = 1, 2, ..., q$, имеют следующий вид:

$$D_y(x_i) = \frac{1}{p_{i*}}\sum_{j=1}^{q}[y_j - m_y(x_i)]^2 p_{ij}\ ; \quad D_x(y_j) = \frac{1}{p_{*j}}\sum_{i=1}^{s}[x_i - m_x(y_j)]^2 p_{ij} \qquad (3.6.5)$$

Нужно отметить, что тождественное совпадение условных и безусловных дисперсий не позволяет делать вывод о независимости случайных величин. Это замечание относится к любым условным характеристикам. Если хотя бы одна из условных характеристик не совпадает с соответствующей безусловной характеристикой, то рассматриваемые величины являются статистически зависимыми.

Пусть прогнозируются значения величины $Y$ по известным значениям величины $X$ с использованием известной регрессии $y = m_y(x)$. В результате опыта будут появляться значения величины $Y$: $y = m_y(x) + \zeta$, отличающиеся от прогнозируемых значений: $y = m_y(x)$. Случайная величина $\zeta$ является ошибкой прогнозирования. Тогда средний квадрат $D_{ост}$ ошибки $\zeta$ будет равен:

$$D_{ост} = M(\zeta^2) = M([Y - m_y(X)]^2). \qquad (3.6.6)$$

Величина $D_{ост}$ называется *остаточной дисперсией.* Смысл ее заключается в следующем: неопределённость в предсказании ожидаемых значений $Y$ полностью определяется дисперсией $D_y$. Сама дисперсия $D_y$ обусловлена, во-первых, влиянием на $Y$ величины $X$, во-вторых, всеми другими (неучтёнными в данном опыте) факторами. Если проводится прогнозирование $Y$ с использованием регрессии $y = m_y(x)$, то неопределённость, связанная с влиянием $X$, снимается. Остаётся неопределённость, обусловленная неучтёнными факторами, которая характеризуется остаточной дисперсией. Не следует путать остаточную дисперсию с условной дисперсией. Первая из них есть число, а вторая - функция.

Представим дисперсию $D_y$ в виде суммы двух компонент:

$$D_y = M[Y - m_y]^2 = M[Y - m_y(X) + m_y(X) - m_y]^2 = M[Y - m_y(X)]^2 + 2M[Y - m_y(X)][m_y(X) - m_y] + M[m_y(X) - m_y]^2.$$

Можно показать, что второе слагаемое в этом выражении равно нулю. Тогда

$$D_y = M[Y - m_y(X)]^2 + M[m_y(X) - m_y]^2. \qquad (3.6.7)$$

Поделим равенство (3.6.7) на $D_y$: $\frac{M[Y - m_y(X)]^2}{D_y} + \frac{M[m_y(X) - m_y]^2}{D_y} = 1$

Первое слагаемое в левой части этого соотношения представляет долю дисперсии $D_y$, обусловленную неконтролируемой компонентой $\zeta$, второе слагаемое - долю дисперсии $D_y$, обусловленную контролируемой компонентой $m_y(X)$. Это второе отношение используется в качестве меры статистической связи между величинами $Y$ и $X$. Оно называется *корреляционным отношением* и обозначается $\eta^2_{y/x}$ (читается: «эта квадрат игрек на икс»). Таким образом,

$$\eta^2_{y/x} = \frac{M[m_y(X) - m_y]^2}{D_y} = 1 - \frac{M[Y - m_y(X)]^2}{D_y} = 1 - \frac{D_{ост}}{D_y}. \qquad (3.6.8)$$

Для корреляционного отношения $\eta^2_{y/x}$ всегда справедливо неравенство:

$$0 \le \eta^2_{y/x} \le 1. \qquad (3.6.9)$$

Равенство $\eta^2_{y/x} = 0$ означает, что $m_y(X) = m_y$. При этом, из (3.6.8) следует, что остаточная дисперсия $D_{ост}$ совпадает с дисперсией $D_y$, т.е. прогнозирование вообще невозможно. Из этого факта нельзя сделать вывод о полной независимости рассматриваемых случайных величин, поскольку может иметь место влияние $X$ на другие числовые характеристики величины $Y$. Если $\eta^2_{y/x} = 1$, то существует функциональная связь между $Y$ и $X$, которая точно описывается регрессией $y = m_y(x)$. Остаточная дисперсия $D_{ост}$ будет равна нулю, и прогнозирование ожидаемых значений величины $Y$ по известным значениям величины $X$ с помощью регрессии будет точным.

Аналогично определяется и второе корреляционное отношение $\eta^2_{x/y}$. Корреляционные отношения могут совпадать или не совпадать. Поэтому при изучении зависимости между величинами необходимо вычислять оба отношения.

Корреляционные отношения характеризуют и линейную и нелинейную связь в совокупности. Поэтому всегда справедливы два неравенства:

$$\eta^2_{y/x} \ge r_{xy}^2 \quad , \qquad \eta^2_{x/y} \ge r_{xy}^2 \quad , \qquad (3.6.10)$$

где $r_{xy}$ - коэффициент корреляции между величинами $X$ и $Y$. Сравнивая коэффициент корреляции с корреляционными отношениями, можно сделать определённые выводы о характере статистической зависимости. Так, если корреляционные отношения велики по сравнению с квадратом коэффициента корреляции, то преобладает нелинейная связь между величинами. Если, напротив, $\eta^2_{y/x} \approx r_{xy}^2$ и, одновременно, $\eta^2_{x/y} \approx r_{xy}^2$, то преобладает линейная связь. Если хотя бы одно из корреляционных отношений равно нулю, то линейная связь полностью отсутствует.

## *3.7. Функциональные преобразования случайных величин*

### *3.7.1 Функция одной случайной величины*

Пусть $Y = \varphi(X)$ некоторое однозначное функциональное преобразование случайной величины $X$. Величина $Y$ также будет случайной величиной, а её возможные значения полностью определяются возможными значениями величины $X$.

Закон распределения вероятностей величины $Y$ полностью определяется законом распределения вероятностей величины $X$. Если $X$ дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n$ и вероятностями этих значений, соответственно, $p_1, p_2, ..., p_n$, то возможными значениями величины $Y$ будут $y_1, y_2, ..., y_n$, определяемые преобразованием: $y_к = \varphi(x_к)$, $к = 1, 2,..., n$. Когда функция $Y = \varphi(X)$ является взаимно однозначной, то $P(Y = y_к) = P(X = x_к) = p_к$ для всех значений $к$. Это и есть закон распределения вероятностей для величины $Y$.

Рассмотрим непрерывную случайную величину $X$ с плотностью распределения вероятностей $f_X(x)$. Если функция $Y = \varphi(X)$ является монотонной функцией(взаимно однозначной), то

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot |x'(y)| . \qquad (3.7.1.1.)$$

Если функции $Y = \varphi(X)$ не является монотонной, то вся область определения этой функции разбивается на интервалы монотонности. Пусть $n$ - число таких интервалов. Выражение обратной функции по отношению к данной на $к$-м интервале обозначим через

$x_k(y)$. Тогда

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{n} f_X(x_k(y)) \cdot |x_k'(y)| \qquad (3.7.1.2.)$$

**Пример 3.7.1**. Требуется найти распределение случайной величины $Y = X^2$, если величина $X$ имеет плотность распределения вероятностей $f_X(x)$. Рассмотреть случай, когда величина $X$ распределена нормально с математическим ожиданием $m_x = 0$ и дисперсией $\sigma^2$.

Функция $y = x^2$ имеет два интервала монотонности: $(-\infty; 0)$ и $(0, \infty)$. На интервале монотонного убывания функции $x = x_1(y) = -\sqrt{y}$ , а на интервале монотонного возрастания функции $x = x_2(y) = \sqrt{y}$ . Следовательно, $x_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$, а $x_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ . Применив формулу (3.7.1.2) получим: $f_Y(y) = f_X(x_1(y)) \cdot |x_1'(y)| + f_X(x_2(y)) \cdot |x_2'(y)|$. Подставляя сюда функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$, получим окончательно: $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot [f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})]$ , $y>0$. Если $X$ имеет нормальное распределение, то $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$, причём $f_X(-\sqrt{y}) = f_X(\sqrt{y})$. Следовательно, $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} \exp(-\frac{y}{2\sigma^2})$, если $y > 0$ и $f_Y(y) = 0$, если $y \le 0$.

Рассмотрим более подробно линейное преобразование случайной величины $X$. Пусть $Y = \alpha X + \beta$, $\alpha \neq 0$. Тогда $x(y) = \frac{1}{\alpha}(y - \beta)$, $x'(y) = \frac{1}{\alpha}$ и $|x'(y)| = \frac{1}{|\alpha|}$. Подставляя это в формулу (3.7.1.1.), получим: $f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot f_X(\frac{1}{\alpha}(y - \beta))$ .

Линейное преобразование не изменяет типа закона распределения вероятностей. Оно приводит лишь к изменению масштаба графика плотности распределения и к переносу начала координат в точку $y_0 = \beta$. Это свойство часто используется при решении задач.

### *3.7.2. Функция нескольких случайных величин*

Пусть случайная величина $Z$, является функцией двух случайных величин $X$ и $Y$: $Z = \varphi(X, Y)$. Будем считать, что любой паре значений $(x, y)$ двухмерной величины $(X, Y)$ соответствует единственное значение $z$ величины $Z$, т.е. $z = \varphi(x, y)$ является однозначной функцией. По определению функции распределения $Z$, $F_z(z) = P(Z < z)$, а это означает, что $F_z(z)$ представляет собой вероятность попадания точки $(x, y)$ в ту область значений $(X; Y)$, для которой выполняется неравенство $\varphi(x, y) < z$. Обозначим эту область через $D_z$. Тогда

$$F_z(z) = \iint\limits_{D_z} f(x,y)\, dxdy , \qquad (3.7.2.1.)$$

где $D_z$ зависит от $z$, а $f(x, y)$ - плотность распределения вероятностей двухмерной случайной величины $(X, Y)$.

Рассмотрим случайную величину $Z = \varphi(X,Y) = X+Y$ и найдем ее закон распределения. Для суммы случайных величин область интегрирования в (3.7.2.1.) представляет собой полуплоскость $x + y < z$:

$$F_z(z) = \iint f(x,y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x,y) dx.$$

$x+y<z$

Заменим переменную: $x = t - y$, $dx = dt$. Тогда

$$F_Z(z)= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z} f(t-y,y)dt = \int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y,y)dy]dt \ .$$

Найдём плотность распределения вероятностей $f_Z(z)$.Производная от интеграла по верхнему пределу интегрирования равна подынтегральной функции, вычисленной при значении переменной интегрирования, равной её верхнему пределу, т. е.

$$f_Z(z)= \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy. \qquad (3.7.2.2.)$$

Формула (3.7.2.2.) справедлива для любых непрерывных величин $X$ и $Y$. Если они статистически независимы, то двухмерная плотность распределения равна произведению одномерных плотностей. В этом случае

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y)dy. \qquad (3.7.2.3.)$$

Формулы типа (3.7.2.3.) называются *формулами свёртки* двух функций. Плотность распределения вероятностей суммы двух случайных величин равна свёртке плотностей распределения. Закон распределения вероятностей суммы двух случайных величин называется композицией распределений этих величин. Применяя многократно формулу свёртки, можно получить закон распределения вероятностей суммы большего числа статистически независимых случайных величин.

# 4. Закон больших чисел

## 4.1. Принцип практической достоверности

Опыт показывает нам, что события, вероятность наступления которых мала, редко происходят, а события, имеющие вероятность близкую к единице, почти обязательно происходят. В соответствии с этими утверждениями на практике целесообразно считать маловероятные события невозможными(“принцип практической невозможности маловероятных событий”), а события, происходящие с большой вероятностью, – достоверными(“принцип практической достоверности”). Сколь мала или сколь велика должна быть вероятность события, зависит от практического применения, от важности этого события, от условий конкретной задачи и последствий, которые могут произойти, если наступит маловероятное событие (или не произойдет событие, вероятность которого близка к единице). Например, если вероятность брака при изготовлении посуды окажется меньше, чем 0,01, то можно этой вероятностью пренебречь и считать, что купленная кастрюля стандартная. Однако, порядок малости такой вероятности совершенно неприменим, если речь идет об изготовлении парашютов.

Следовательно, события с вероятностями, близкими к крайним значениям ноль или единица, имеют важное значение в приложениях теории вероятности к практике, в частности в математической статистике, когда необходимо принимать решения о закономерностях генеральных совокупностей по выборкам.

Принцип практической достоверности пригоден, если рассматриваются массовые явления. Так, если оценивается рейтинг кандидата на некую должность, то опрос должен охватывать как можно больше респондентов, тогда результат опроса можно считать достоверно соответствующим действительному положению.

Одной из основных задач теории вероятностей является установление закономерностей, происходящих с вероятностями, близкими к единице. Эти закономерности должны учитывать совместное влияние большого числа независимо (или слабо зависимо) действующих факторов. При этом каждый фактор в отдельности характеризуется незначительным воздействием. Всякое предложение, устанавливающее отмеченные закономерности, называется *законом больших чисел* (З.Б.Ч.).

Для формулировки теорем закона больших чисел введём понятие сходимости по вероятности. Пусть $X_1, X_2..., X_n$ - последовательность случайных величин. Говорят, что эта последовательность сходится по вероятности к числу $\alpha$, если для любого как угодно малого положительного числа $\varepsilon$ выполняется равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n-\alpha\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (4.1.1)$$

Особенность сходимости по вероятности состоит в том, что нельзя полностью отвергать событие $|X_n - \alpha| \geq \varepsilon$ при $n\to\infty$. Здесь уместно вспомнить, что вероятность невозможного события равна 0, но обратное утверждение не всегда является верным, т.е. событие, имеющее нулевую вероятность, может, тем не менее, произойти.

Теоремы закона больших чисел точно устанавливают условия, при которых применим принцип практической достоверности, и тем самым обеспечивают возможность эффективного использования их на практике.

### *4.2. Теоремы закона больших чисел*

Справедливо следующее неравенство:

***Общее неравенство Чебышева:***

$$P(X\geq a) \leq \frac{M(z(X))}{z(a)} \qquad (4.2.1).$$

*где X - некоторая случайная величина, z- неотрицательная, неубывающая функция, определенная на множестве возможных значений X.*

Доказательство: так как функция $z$ - неотрицательна и не убывает, то по определению математического ожидания $z(X)$ получим цепочку неравенств :

$$M(z(X))=\int_{-\infty}^{\infty} z(x)f(x)dx \geq \int_a^{\infty} z(x)f(x)dx \geq \int_a^{\infty} z(a)f(x)dx \geq z(a)\int_a^{\infty} f(x)dx= z(a)\cdot P(X\geq a) \qquad (4.2.2.).$$

Отметим, что $f(x)$-плотность распределения с. в. $X$, а $z(a)\leq z(x)$, если $a\leq x$, и $P(X\geq a)= \int_a^{\infty} f(x)dx$ . Из полученного неравенства( 4.2.2.) и условия $z(a)$ будем иметь, поделив обе части неравенства на $z(a) > 0$

$$P(X\geq a)\leq \frac{M(z(X))}{z(a)} \quad ,$$

что и требовалось доказать.

Из общего неравенства Чебышева вытекают следующие частные случаи, которые имеют иногда свои названия:

1. $P(|X\text{-}M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ , $\varepsilon> 0$ (***другое неравенство Чебышева***), ( 4.2.3.).

2. $P(|X| \geq \varepsilon)\leq \frac{M(|X|^k)}{\varepsilon^k}$ , $\varepsilon> 0$ , $k\geq 0$ (***неравенство Маркова***), ( 4.2.4.).

3. $P( X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$ , $\varepsilon> 0$ , $x\geq 0$ (***лемма Маркова***), ( 4.2.5.).

4. $P(|X| \geq \varepsilon)\leq \frac{M|X|}{\varepsilon}$ , $\varepsilon> 0$ (***также неравенство Чебышева***). ( 4.2.6.).

Неравенство **1.** Чебышева, иногда записывается в эквивалентной форме **1*.**: $P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$,
что позволяет доказывать некоторые пределы, в которых участвуют последовательности независимых случайных величин $X_n$.

Все частные случаи могут быть получены из общего неравенства Чебышева при надлежащем выборе функции z и аргумента $X$. Так, чтобы получить **1.**, следует $X$ заменить на отклонение $|X-M(X)|$, вместо буквы $a$ писать $\varepsilon$, а в качестве функции z выбрать $z(x)= x^2$ или $z(|X-M(X)|) = |X-M(X)|^2 = (X-MX)^2$. Чтобы получить **2.**, следует положить $|X|$ вместо $X$, $z(x) = |X|^k$, $\varepsilon = |a|$. Далее, **3.** получается при $z(x) = X \geq 0$, $\varepsilon = |a|$, **4.** следует из **2.** при $\kappa = 1$.

Рассмотрим закон больших чисел в различных формах.

***Теорема Чебышева (З.Б.Ч. в форме Чебышева).*** *Пусть $X_1, X_2, \cdots$ - попарно независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями: $D(X_k) < C$, $\kappa \in \{1,2,...\}$, где $C$ - некоторая постоянная. Положим $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Тогда последовательность $(Y_n - M(Y_n))$ стремится по вероятности к нулю при*

*$n \to \infty$, то есть для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P[|Y_n - M(Y_n)| < \varepsilon] = 1$$

*или (что равносильно)*

$$\lim_{n\to\infty} P[|Y_n - M(Y_n)| \geq \varepsilon] = 0 .$$

Условная запись : $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{по вер.}} M(Y_n)$ означает сходимость по вероятности $Y_n$ к $M(Y_n)$.
Для доказательства теоремы Чебышева применим к случайной величине $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ неравенство **1*.** Чебышева и получим, имея в виду, что $D(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) \leq \frac{1}{n^2} \cdot nc = \frac{c}{n}$,

$$P[|Y_n - M(Y_n)| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2} .$$

Так как вероятность не может оказаться больше 1, получим : $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n\varepsilon^2} = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} P[|Y_n - M(Y_n)| < \varepsilon] = \lim_{n\to\infty} P\left[\left| \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon\right] = 1.$$

Таким образом, согласно закону больших чисел, при достаточно большом числе независимых случайных величин, имеющих дисперсии, ограниченные общим постоянным числом, их средняя арифметическая практически достоверно мало отличается от средней арифметической математических ожиданий этих случайных величин.

Приведем теперь частные случаи теоремы Чебышева.

***Теорема Бернулли (З.Б.Ч. Бернулли).*** *Пусть $m$ - число появлений события $A$ в $n$ независимых испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью появления события $A$ в отдельном испытании, равной $p$, тогда частость $\frac{m}{n}$ стремится по вероятности к вероятности $p$, когда $n \to \infty$, то есть $\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{по вер.}} p$.*

Теорема (З.Б.Ч.) Бернулли является частным случаем теоремы Чебышева, если рассматривать случайные величины $X_\kappa = m_\kappa$, $k=1,2,...n$, где $m_\kappa$ - случайная величина - число появлений события $A$ в одном испытании( $m_\kappa$ принимает два значения: 1

при появлении события $A$ в одном испытании и 0 - при непоявлении), распределенные по закону Бернулли, независимы и одинаково распределены с $M(m_k)= p$ и $D(m_k) = pq$, причем $m$ - число появлений события $A$ в $n$ испытаниях: $m=\sum_{k=1}^{n} m_k$. Поэтому $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{m}{n}$, $M(Y_n) = p$ и $\frac{m}{n}$ стремится по вероятности к $p$, когда $n\to\infty$.

***Теорема Пуассона (З.Б.Ч. Пуассона).*** *Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления события A в k испытании равна $p_k$, то*

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{по вер.}} \frac{p_1+p_2+\cdots+p_k+\cdots+p_n}{n}, \quad \kappa \in \{1,2,...\},$$

*где $m = m_1+m_2+\cdots+m_k+\cdots+m_n$, $m_k$ - случайная величина, равная 1, при появлении события A в k испытании и 0 - при непоявлении; $\kappa \in \{1, 2, \ldots\}$, $m$ - число появлений события A в первых $n$ испытаниях.*

Теорема (З.Б.Ч.) Пуассона получается при $X_\kappa=m_k$, где случайные величины $m_\kappa$ подчиняется закону Бернулли с $M(m_\kappa)=p_k$ и $D(m_k)= p_kq_k$, независимы и неодинаково распределены. Однако их дисперсии ограничены величиной $c = \frac{1}{4}$, так как $p_kq_k = p_\kappa(1 - p_\kappa)$ и максимум $p_\kappa(1 - p_\kappa) = \frac{1}{4}$ достигается при $p_\kappa= \frac{1}{2}$.

***Теорема (З.Б.Ч.).*** *Пусть имеется последовательность попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, с одинаковыми математическими ожиданиями, равными M, и ограниченными равномерно дисперсиями $D(X_1) < C$, $D(X_2) < C, \cdots$*

*Тогда :* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{по вер.}} M.$

***Теорема Хинчина (З.Б.Ч.)*** *Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots X_k, \cdots$, $\kappa \in \{1, 2, \ldots\}$, имеющих математическое ожидание $M(X_k)= a$.*

*Тогда :* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{по вер.}} a.$

Эта теорема не является частным случаем теоремы Чебышева, хотя при ее доказательстве используются неравенства Чебышева. Закон больших чисел Хинчина не требует наличия дисперсии у случайной величины, в отличие от условий закона больших чисел Чебышева. С такими величинами, в смысле одинаковости закона распределения, в основном имеет дело математическая статистика.

Таким образом, закон больших чисел позволяет нам считать достоверными события, заключающиеся в том, что относительная частота появления события принимает как угодно мало отличающиеся от вероятности появления этого события в отдельном испытании значения, средняя арифметическая нескольких измерений некоторого параметра мало отличается от действительной величины этого параметра при большом числе испытаний, измерений, а также определенных ограничений на величину рассеивания и условий независимости.

### *4.3. Центральная предельная теорема*

Другой формой проявления закона больших чисел являются *центральные предельные теоремы* - сходимость по вероятности нормированных сумм случайных величин (при определенных ограничениях, налагаемых на их распределения) к конкретному распределению некоторой случайной величины (в частности, распределенной нормально) при неограниченном увеличении числа слагаемых *n*.

В таком случае практически достоверным считается использование для распределения сумм предельного распределения, то есть асимптотического распределения.

Приведем в общем виде формулировку одной из центральных предельных теорем. ***Теорема Ляпунова.*** *Пусть имеется последовательность взаимно-независимых случайных величин $X_1$, $X_2$, ...,удовлетворяющих условиям:*

1) *все величины имеют определенные математические ожидания и конечные дисперсии;*
2) *ни одна из величин не выделяется резко от остальных по своим значениям.*

*Тогда при* $n \to \infty$ *распределение случайной величины* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ *приближается к нормальному закону:*

$$\lim_{n\to\infty} P[t_1 < \frac{1}{D_n}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)) < t_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

*где* $D_n^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k)$ , *Ф*(*x*) – *функция Лапласа.*

Из теоремы Ляпунова следует, что если независимые случайные величины $X_1$, $X_2$, ⋯ распределены одинаково с положительной конечной дисперсией, то предельное равенство выполняется.

В частности, выполняется интегральная теорема Муавра-Лапласа, если положить $X_k = m_k$ , где $m_k=1$ с вероятностью $p_k$ , $m_k=0$ с вероятностью $q_k$ , причем в схеме Бернулли $p_k=p$ и, следовательно, для $X=m=\sum_{k=1}^{n} m_k$ с $M(m)=np$, $D(m)=npq$:

$$\lim_{n\to\infty} P[t_1 \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le t_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi(t_2) - \Phi(t_1).$$

Практически центральная предельная теорема применяется при конечных значениях числа слагаемых величин. Если для величины $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ выполняются условия центральной предельной теоремы, то говорят, что эта величина имеет *асимптотически нормальное распределение.* С помощью центральной предельной теоремы можно обосновать выбор нормального распределения для аппроксимации закона распределения исследуемой случайной величины. Достаточно показать, что эта величина образуется в результате аддитивного воздействия многих мелких факторов.

## *5. Задачи*

### *5.1. Комбинаторика*

**1.** Сколькими способами 5 человек могут встать в очередь друг за другом?

**2.** Сколькими способами из группы спортсменов в 18 человек можно выбрать двоих участников соревнования?

**3.** Сколькими способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

**4.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если а) цифры в числе не повторяются; б) цифры в числе могут повторяться?
**5.** Сколько различных полных обедов из трех блюд можно составить, если в меню имеется 3 первых, 4 вторых и 2 третьих блюда?
**6.** Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если нечетные и четные цифры в числе чередуются и не повторяются?
**7.** Фотограф выстраивает в ряд трех мужчин и четырех женщин так, чтобы мужчины и женщины чередовались. Сколькими способами он может это сделать?
**8.** Студент сдает в сессию 3 экзамена. Сколько существует различных комбинаций оценок, которые он может получить?
**9.** Сколько различных вариантов распределения оценок за контрольную работу может быть для трех студентов, если возможны оценки «2», «3», «4», «5»?
**10.** Сколькими способами можно купить набор из трех пирожных, если в продаже имеются 4 сорта пирожных, и сорта пирожных в наборе могут повторяться?
**11**. Сколько различных шестибуквенных слов можно составить из карточек,на которых написаны буквы З, Н, А, Н, И, Я?
**12.** В урне $M$ белых и $N$-$M$ черных шаров. Сколько различных способов выбора из урны $n$ шаров, среди которых $m$ белых, можно осуществить?
**13.** Сколько различных наборов по 7 пирожных можно составить из 3 сортов пирожных?
**14.** Решить уравнение в целых неотрицательных числах, указать число различных решений и выписать их:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5.$$

**15.** Указать число способов выбора трех контейнеров для контроля из трех партий, содержащих 15, 8 и 10 контейнеров (по одному из каждой партии).

### *5.2. Классическое определение вероятности*

**1.** Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.
**2.** Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.
**3.** Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.
**6.** Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.
**7.** На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.
**8.** На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".
**9.** Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?
**10.** На столе лежит 15 экзаменационных билетов с номерами 1, 2, ..., 15. Преподаватель наугад берёт 2 билета. Какова вероятность того, что они из первых четырёх?
**11.** В водоёме из 10 самок карпа чешуйчатых 8, а из 20 самцов чешуйчатых 12. Какова

вероятность чешуйчатой пары при условии случайного скрещивания?
**12**. Из двух колод по 36 карт наудачу выбирают по одной карте. Какова вероятность того, что обе карты красные?
**13.** Бросаются 3 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не больше 4?
**14.** В среднем из 10 женихов 2 и из 10 невест 1 имеют отрицательный резус-фактор. Какова вероятность "отрицательной" пары при случайном выборе?
**15.** В 5 из 9 пробирок находиться раствор кислоты, в остальных раствор щелочи. Какова вероятность того, что из 3 наудачу выбранных пробирок 2 с кислотой?

### *5.3. Геометрическое определение вероятности*

**1.** На отрезке $OA$ длины $L$ числовой оси $OX$ наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка $BC$ окажется меньше, чем $L/2$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.
**2.** Из отрезка [–2; 2] наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а модуль разности меньше единицы?
**3.** Случайная точка $X$ наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 3 и 4. Найдите вероятность того, что расстояние от $X$ а) до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит 1; б) до каждой стороны прямоугольника не превосходит 1; в) до каждой диагонали прямоугольника не превосходит 1.
**4.** Через станцию метро поезда следуют в двух направлениях - в каждом направлении с интервалом 5 минут. В одном направлении у мистера $X$ живет друг $Y$, а в другом - подруга $Z$. Каждый день мистер $X$ приходит на станцию в случайный момент времени и садится на тот поезд, который подойдет первым. При этом оказывается, что у друга $Y$ он бывает приблизительно в 4 раза реже, чем у подруги $Z$. Как объяснить этот факт?
**5.** На отрезок [0,3] независимо друг от друга бросаются две точки. Найдите вероятность того, что первая них ближе к точке 0, чем вторая.
**6.** Стержень единичной длины разломан в двух наудачу выбранных точках. С какой вероятностью из полученных отрезков можно составить треугольник?
**7.** Наудачу называется два действительных числа из отрезка [0,10]. Какова вероятность, что сумма этих чисел заключена между 5 и 10?
**8.** Два лица $X$ и $Y$ условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Лицо $X$ ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Лицо $Y$ ждет другого в течение 15 минут. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа?
**9.** В шар вписан правильный тетраэдр. Какова вероятность, что выбранная наудачу в шаре точка, окажется внутри тетраэдра?
**10.** На окружности наудачу выбраны три точки $K$, $L$ и $M$. Какова вероятность, что треугольник $KLM$ а) остроугольный, б) тупоугольный, в) прямоугольный, г) равносторонний, д) равнобедренный?
**11.** Внутри единичного квадрата [0,1]x[0,1] наудачу ставится точка $(x,y)$. Для различных значений параметра а > 0 найдите вероятность того, что координаты этой точки связаны неравенством $y < a^2 - x^2$.
**12.** На отрезок [0,1] наудачу брошены три точки. Найдите вероятность того, что из отрезков, равных расстояниям от точки 0 до точек падения, можно составить треугольник.
**13.** Стержень единичной длины наудачу разламывается на две части, после чего большая из частей опять разламывается надвое в наудачу выбранной точке. Найдите вероятность того, что из полученных частей можно составить треугольник.

**14.** На паркет, составленный из равносторонних треугольников со стороной 1, случайным образом падает монета радиуса $r$. Какова вероятность того, что монета целиком окажется внутри одного из треугольников?

**15.** Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

### *5.4. Сложение и умножение вероятностей*

**1.** В ящике лежат шары: 4 белых, 10 красных, 8 зеленых, 9 коричневых. Из ящика вынимают один шар. Определить вероятность того, что шар окажется цветным(не белым) ?

**2.** В популяции дрозофилы у 20% особей имеется мутация крыльев. Если из популяции выбирают наугад две особи, то какова вероятность того, что хотя бы у одной из них не будет мутации крыльев.

**3.** От аэровокзала отправились два автобуса к трапам самолётов. Вероятности прибытия равны для каждого 0,95. Найти вероятность того, что вовремя придёт хотя бы один автобус.

**4.** Всхожесть семян огурцов равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух посаженых семян хотя бы одно не взойдёт.

**5.** Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет карта пиковой масти или туз.

**6.** Какова вероятность выпадения «5» или «6» при однократном бросании игральной кости?

**7.** На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность в темноте сорвать не синюю астру.

**8.** Для одного стрелка вероятность выбить 10 очков за один выстрел равна 0,1, вероятность выбить 9 очков – 0,3, 8 и менее очков – 0,6. Найти вероятность того, что за один выстрел стрелок выбьет не менее 9 очков.

**9.** Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не более трёх выстрелов.

**10.** Среди 10 лампочек 3 имеют дефект. Их испытывают одну за другой, причём дефектная лампочка сразу при этом перегорает. Найти вероятность, что для выбора качественной пришлось испытать не более трёх лампочек.

**11.** Двое друзей пришли в кинотеатр к началу сеансов. Можно было купить билеты в «большой» зал с вероятностью 0,2 и в «малый» зал с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что друзья попали в кино?

**12.** Прибор состоит из трёх элементов, которые за время $T$ отказывают с вероятностью 0,1; 0,2 и 0,25 соответственно. Найти вероятность отказа двух элементов за время $T$.

**13.** Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятности попадания для них равны соответственно 0,4 и 0,5. Какова вероятность: а) ровно одного попадания; б) хотя бы одного попадания?

**14.** В урне 3 белых и 1 чёрный шар. Наугад один за другим без возвращения извлекают шары до тех пор, пока не появится чёрный. Найти вероятность того, что было проделано не более трёх таких операций.

**15.** Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность доставки газет в первое отделение равна 0,9,во второе – 0,85 и в третье – 0,8. Найти вероятность того, что два отделения получат газеты вовремя, а одно с опозданием.

## *5.5. Формула полной вероятности . Формула Байеса*

**1.** В сборочный цех поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 51% деталей от их общего количества, на втором станке 24% и на третьем 25%. При этом на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором 80% и на третьем 70%. Определить, вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта ?

**2.** Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике находится 26 белых шаров, во втором 15 белых и 11 черных, в третьем ящике 26 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что белый шар вынут из первого ящика.

**3.** В семи урнах содержится по 2 белых и два чёрных шара, а в трёх урнах по 7 белых и 3 чёрных шара. Какова вероятность, что из урны, взятой наудачу, будет извлечён белый шар? Найти вероятность, что шар извлечён из урны с 7 белыми и 3 чёрными шарами, если он оказался белым.

**4.** Станок 30% времени обрабатывает деталь А и 70% – деталь В. При обработке детали А он простаивает 10% времени, а детали В – 15%. Какова вероятность застать станок простаивающим? Найти вероятность, что станок, который застали простаивающим, находился в режиме обработки детали В.

**5.** Сборщик получает 45% деталей завода №1, 30% – завода №2, остальные – с завода №3. Вероятность того, что деталь первого завода отличного качества – 0,7, для деталей второго и третьего заводов эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти вероятность, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется отличного качества. Какова вероятность, что взятая наудачу деталь, оказавшаяся отличного качества, изготовлена заводом №1?

**6.** По цели производится три выстрела с вероятностью попадания 0,2 при каждом. Вероятность уничтожения цели при одном попадании равна 0,3, при двух попаданиях – 0,6, при трёх – 0,9. Какова вероятность, что было одно попадание, если цель уничтожена?

**7.** В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров, во второй 5 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, после чего из второй урны извлекается одни шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что из первой во вторую урну был переложен чёрный шар, если извлечённый из второй урны шар оказался белым?

**8.** В цехе имеются три станка. Вероятность изготовления стандартной детали на первом станке составляет 0,78, на втором – 0,92, на третьем -0,86. Ввиду различного местоположения рабочий выбирает первый станок с вероятностью 0,5, второй – 0,2, третий – 0,3. Найти вероятность, что изготовленная им на выбранном станке деталь окажется нестандартной. Какова вероятность того, что деталь изготавливалась на третьем станке, если она оказалась нестандартной?

**9.** По команде «огонь» одно из трёх орудий стреляет по мишени. Вероятность попадания для орудии равна соответственно 0,8; 0,8; 0,6. Команда «огонь» подаётся в два раза чаще первому орудию, чем второму и третьему по отдельности. Найти вероятность, что мишень окажется поражённой. Какова вероятность того, что мишень была поражена выстрелом из третьего орудия?

**10**. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй 3 белых и 5 чёрных. Из первой во вторую перекладывают, не глядя, два шара, после чего из второй урны извлекается шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым. Какова вероятность того, что из первой во вторую урну были переложены чёрный и белый шары, если из второй урны извлечён белый шар?

**11.** В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 8% и третьего – 6%. Приобретённый телевизор оказался без дефектов. Какова вероятность того, что этот телевизор был изготовлен на первом заводе, если в магазин поступило 40% телевизоров с первого завода, 25% – со второго и 35% – с третьего?

**12.** На общий конвейер поступают узлы, изготовленные двумя рабочими. Производительность второго рабочего вдвое больше, чем первого. Вероятность допустить брак для первого рабочего 0,075, а для второго 0,09. Найти вероятность, что поступивший на общий конвейер узел будет иметь брак. Какова вероятность, что узел, оказавшийся бракованным, изготовлен вторым рабочим?

**13.** Покупатель приобрёл электролампочку. Известно, что в момент покупки партия лампочек содержала 60% продукции местного предприятия и 40% – иногороднего. 500 часов работают безотказно каждые 90 из 100 лампочек местного завода и 80 из 100 иногороднего. Найти вероятность, что купленная лампочка проработает 500 часов. Какова вероятность того, что лампочка, проработавшая 500 часов безотказно, местного производства?

**14.** Узлы поступают на общий конвейер с двух участков. Вероятность брака узла с первого участка 0,05, со второго – 0,1. Второй участок имеет производительность в полтора раза больше, чем первый. Найти вероятность того, что взятый с конвейера узел окажется годным. Какова вероятность того, что годный узел изготовлен на первом участке?

**15.** На сборку поступают детали с двух заводов-изготовителей, причём они поставляют их в равном количестве. У первого завода брак составляет 4%, у второго - 3%. Наугад взяли 2 детали. Найти вероятность, что они обе доброкачественные. Какова вероятность, что эти детали изготовлены первым заводом, если они обе доброкачественные?

### *5.6. Формула Бернулли, следствия из неё, и её асимптотические приближения*

**1.** Вероятность отказа прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью 0,99 получить хотя бы один отказ?

**2.** Вероятность того, что дилер продаст ценную бумагу, равна 0.7. Найдите вероятность того, что из 1500 ценных бумаг дилер продаст а) от 1000 до 1200 бумаг, б) не менее 1000 бумаг, в) не более 1100 бумаг.

**3.** Если в среднем левши составляют 1%, какова вероятность того, что среди 200 человек окажется четверо левшей? Какова вероятность среди 200 человек обнаружить не менее 4 левшей?

**4.** В некотором семействе 8 детей. Вероятность рождения мальчика или девочки равна 0,5. Найти вероятность того, что а) имеется 4 мальчика и 4 девочки; б) число мальчиков заключено между 2 и 6 (включительно).

**5.** Вероятность хотя бы одного появления события при четырёх независимых испытаниях равна 0,59. Какова вероятность появления события при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

**6.** Батарея дала 14 выстрелов по военному объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти а) наивероятнейшее число попаданий и его вероятность: б) вероятность разрушения объекта, если для его разрушения требуется не менее 4 попаданий.

**7.** В некотором обществе имеется 1% дальтоников. Каков должен быть объём случайной выборки (с возвращением), чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одного дальтоника была не менее 0,95?

**8.** Игральная кость бросается 6 раз. Найти вероятность того, что хотя бы два раза появится число очков, кратное трём.

**9.** На отрезок [0, 10] наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в отрезок [0, 2], одна – в [2, 3], две – в [3, 10].

**10.** Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами, если сделано 5000 выстрелов.

**11.** В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 8 точек, брошенных наудачу в круг, три попадут в квадрат, две – в один сегмент, три – в оставшиеся три сегмента?

**12.** Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,005. Найти вероятность того, что, имея 100 билетов, можно выиграть хотя бы по двум из них.

**13.** Тестовый билет содержит 5 вопросов. На каждый вопрос предлагается два варианта ответа, из которых один является правильным. Для получения зачёта нужно правильно ответить не менее чем на три вопроса. Какова вероятность того, что некто, выбирая ответы наудачу, может получить зачёт?

**14.** Вероятность хотя бы одного выигрыша по 5 лотерейным билетам равна 0,1. Какова вероятность выигрыша по одному билету, если предполагать, что для всех билетов эта вероятность одинакова?

**15.** *Задача Банаха.* Некоторый курящий человек носит с собой два коробка спичек. Всякий раз, когда необходимо закурить, он выбирает наугад один из коробков. При очередном закуривании коробок оказался пустым. Какова вероятность того, что во втором коробке окажется 5 спичек, если изначально в обоих коробках было по 15 спичек?

### *5.7. Случайная величина, ее закон распределения вероятностей и числовые характеристики*

*В задачах 1 – 13 найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \leq к$.*

**1.** Ведётся стрельба до первого попадания, но не свыше 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. $X$ - число произведённых выстрелов. $к = 3$.

**2.** Партия из 20 деталей содержит 4 бракованных. Произвольным образом выбрали 5 деталей. $X$ – число доброкачественных деталей среди отобранных. $k = 2$.

**3.** Прибор содержит три элемента, вероятности отказов которых за определённое время независимы и равны соответственно 0,15; 0,2 и 0,25. $X$ – число отказавших элементов. $k = 2$.

**4.** В урне 5 белых и три черных шара. Наудачу один за другим извлекаем шары из урны до появления белого шара. $X$ – число извлечённых чёрных шаров. $k = 3$.

**5.** На пути автомашины 4 независимых друг от друга светофора, каждый из которых с вероятностью 0,4 запрещает движение. $X$ – число пройденных до первой остановки светофоров. $k = 2$.

**6.** По мишени одновременно стреляют 3 стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,65; 0,7 и 0,8. $X$ – число попаданий. $k = 1$.

**7.** Производится выстрел из трёх орудий одновременно по цели с вероятностями попадания 0,5; 0,6 и 0,7 для каждого орудия. $X$ – число попаданий. $k = 1$.

**8.** Некто забыл последнюю цифру кодового замка. Зная, что это одна из цифр 5, 6, 7, 8, 9, он случайным образом их перебирает. $X$ – число попыток. $k = 2$.

**9.** По мишени ведётся стрельба до первого попадания, но не более 4 раз. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,9. $X$ – число выстрелов. $k = 2$.

**10.** Одновременно бросается 4 монеты. $X$ – число выпавших «орлов». $k = 3$.

**11.** В приборе имеется три элемента, вероятности отказа которых за определённое время равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4. Отказы элементов независимы. $X$ – число отказавших элементов. $k$ = 2.

**12.** В ящике 4 пары одинаковых ботинок. Вынимаем ботинки, не глядя, один за другим до тех пор, пока не составится пара. $X$ – число вынутых ботинок. $k$ = 3.

**13.** Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. $X$ – число заработанных очков. $k$ = 10.

**14.** Вычислить математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины $X$, заданной таблично:

| $x_к$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_к$ | 0,1 | 0,15 | 0,35 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,05 |

**15.** Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины $X$ определяется формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } & x \le 0\,, \\ ax^3, \text{ если } & 0 < x \le 3\,, \\ 1, \text{если } & x > 3\,. \end{cases}$$

Определить коэффициент $a$ и плотность распределения вероятностей $f(x)$. Найти вероятность того, что величина $X$ примет значение из интервала (1; 2).

**16.** Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin x\,, \text{ если } & 0 < x \le \pi\,, \\ 0\,, \text{ если } & x \le 0 \text{ или } x > \pi\,. \end{cases}$$

Определить коэффициент $a$ и функцию распределения вероятностей величины $X$. Найти вероятность того, что величина $X$ примет значение из интервала ($\pi/3$; $\pi/2$).

**17.** Плотность распределения случайной величины $X$ задана формулой

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,, \quad -\infty < x < \infty\,.$$

(закон Коши). Определить вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала (-1; 1).

**18.** Вычислить математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины $X$, если

$$f(x) = \begin{cases} 4x \cdot e^{-2x}\,, \text{ если } & x \ge 0 \\ 0\,, \text{ если } & x < 0\,. \end{cases}$$

**19.** Вычислить коэффициент вариации для случайной величины, определённой в задаче 16.

**20.** Определить все квартили случайной величины X, распределённой по экспоненциальному закону: $f(x) = 3e^{-3x}$, $x > 0$. Найти вероятное отклонение случайной величины.

**21.** Вычислить математическое ожидание, дисперсию, скошенность и эксцесс непрерывной случайной величины $X$, распределённой равномерно в интервале [1; 5].

**22.** Непрерывная случайная величина $X$ подчинена закону распределения с плотностью $f(x) = 0{,}5 \cdot e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$. Определить математическое ожидание, дисперсию, скошенность и эксцесс этой случайной величины.

### *5.8. Непрерывная случайная величина*

В задачах **1–10** плотность распределения $f(x)$ случайной величины $X$ на $(a, b)$ задана в таблице, а при $x \notin (a, b)$ $f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр $A$; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию

$D(X)$ и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность $P$ того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного ε.

| Номер задачи | $f(x)$ | $(a, b)$ | ε |
|---|---|---|---|
| **1** | $Ax+1/3$, | (0, 1) | 1/2 |
| **2** | $2x + A$ | (0, 1) | 1/3 |
| **3** | $Ax^2$ | (0, 1) | 1/2 |
| **4** | $A(2x + 1)$ | (0, 2) | 1/3 |
| **5** | $A(x + 2)$ | (0, 2) | 1 |
| **6** | $A(1 – x2)$ | (0, 1) | 1/8 |
| **7** | $2 – Ax$ | (0, 1) | 1/3 |
| **8** | $A(2x^2 + 1)$ | (0, 1) | 1/10 |
| **9** | $A(4 + 3x)$ | (0, 1) | 1 |
| **10** | $A(x^2 + 1)$ | (0, 2) | 1 |

### *5.9. Нормальная случайная величина*

В задачах **1–10** дано, что рост людей, проживающих в данной местности, есть случайная величина $X$, распределённая по нормальному закону со средним значением $a$ и средним квадратическим отклонением σ. Найти: а) вероятность того, что наудачу выбранный человек имеет рост от $x_1$ до $x_2$ см; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - a$ окажется меньше δ; в) по правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемого роста человека.

| Номер задачи | $a$ | σ | $x_1$ | $x_2$ | δ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 170 | 5 | 160 | 180 | 7 |
| **2** | 170 | 6 | 165 | 185 | 10 |
| **3** | 170 | 7 | 160 | 185 | 10 |
| **4** | 165 | 7 | 155 | 175 | 6 |
| **5** | 165 | 6 | 150 | 170 | 8 |
| **6** | 165 | 5 | 160 | 175 | 9 |
| **7** | 175 | 7 | 165 | 175 | 5 |
| **8** | 175 | 6 | 160 | 180 | 9 |
| **9** | 175 | 5 | 165 | 185 | 4 |
| **10** | 175 | 8 | 170 | 180 | 15 |

### *5.10. Двумерная дискретная случайная величина*

Закон распределения двумерной дискретной случайной величины ($X$, $Y$) задан таблицей. Найти:

1) частные законы распределения случайных величин $X$ и $Y$;
2) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
3) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
4) корреляционный момент $C_{xy}$;
5) коэффициент корреляции $r_{xy}$;
6) условный закон распределения случайной величины $X$ при условии, что случайная величина $Y$ принимает своё наименьшее значение.

| X \ Y | -3 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 0,1 | 0,2 |
| 1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 2 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| 1 | 0,2 | 0 | 0,1 |
| 2 | 0,2 | 0,1 | 0 |

**2.**

| X \ Y | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| -2 | 0 | 0,2 | 0 |
| -1 | 0,2 | 0,1 | 0 |
| 0 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

**3.**

| X \ Y | -2 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 4 | 0 | 0,1 | 0,1 |

**4.**

| X \ Y | -3 | -2 | -1 |
|---|---|---|---|
| -3 | 0 | 0,1 | 0,2 |
| -2 | 0,1 | 0 | 0,1 |
| -1 | 0,2 | 0,1 | 0,2 |

**5.**

**6.**

| X \ Y | 1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| 4 | 0,1 | 0,2 | 0 |
| 6 | 0,1 | 0,3 | 0 |

### *5.11. Двумерная непрерывная случайная величина*

В области $U$ плотность распределения двумерной случайной величины ($X$, $Y$) равна $f(x, y)$. Вне области $U$ плотность распределения ($X$, $Y$) равна 0. Найти:

1) коэффициент $A$;
2) вероятность $P = P((X,Y) \in G)$;
3) одномерные плотности распределения $f_X(x)$ и $f_Y(y)$,
4) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
5) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
6) корреляционный момент $C_{xy}$;
7) коэффициент корреляции $r_{xy}$.

**1.** $U = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, $f(x,y) = A(x + y)$, $G = \{x + y \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\}$.

**2.** $U = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$, $f(x,y) = A(2x + y)$ $G = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

**3.** $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x,y) = Axy$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

**4.** $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x,y) = Ax^2y$, $G = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

**5.** $U = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, $f(x,y) = A(x^2+2y^2)$, $G = \{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$.

**6.** $U = \{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$, $f(x,y) = Ax^2y^2$, $G = \{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$.

### *5.12. Закон больших чисел*

**I.** Дисперсия случайной величины $X$ равна $\sigma^2$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более чем на величину $\varepsilon$. Параметры выбрать по номеру варианта.

**1.** $\sigma^2 = 1{,}5$; $\varepsilon = 2$ **2.** $\sigma^2 = 1{,}4$; $\varepsilon = 2$ **3.** $\sigma^2 = 1{,}1$; $\varepsilon = 1{,}5$ **4.** $\sigma^2 = 1{,}2$; $\varepsilon = 1{,}8$ **5.** $\sigma^2 = 1$; $\varepsilon = 1{,}8$

**6.** $\sigma^2 = 1{,}2$; $\varepsilon = 1{,}8$ **7.** $\sigma^2 = 1{,}3$; $\varepsilon = 2{,}2$ **8.** $\sigma^2 = 2{,}5$; $\varepsilon = 3$ **9.** $\sigma^2 = 1{,}8$; $\varepsilon = 2{,}4$ **10.** $\sigma^2 = 1{,}6$; $\varepsilon = 3$

**II.** Для случайной величины из задания **I.** оценивается математическое ожидание. Сколько нужно сделать измерений, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, среднее арифметическое этих измерений отклонилось от истинного математического ожидания не более чем на величину $\varepsilon$?

**III.** Для оценки процента дефектных деталей обследуются на наличие дефектов $n$ деталей. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что доля дефектных деталей $k/n$ отклонится от истинной вероятности дефектной детали не более чем на величину $\varepsilon$. Параметры $n$ и $\varepsilon$ выбрать по номеру варианта.

**1.** $n = 64$; $\varepsilon = 0{,}08$ **2.** $n = 49$; $\varepsilon = 0{,}09$ **3.** $n = 36$; $\varepsilon = 0{,}12$ **4.** $n = 25$; $\varepsilon = \text{O},13$ **5.** $n = 64$; $\varepsilon = 0{,}11$ **6.** $n = 49$; $\varepsilon = \text{O},1$ **7.** $n = 64$; $\varepsilon = \text{O},1$ **8.** $n = 36$; $\varepsilon = \text{O},1$ **9.** $n = 25$; $\varepsilon = \text{O},2$ **10.** $n = 49$; $\varepsilon = 0{,}11$

## Список используемой литературы

**1.** Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 7-е изд. стер. – М.: Высш. шк**.,** 2001. – 575 с.: ил.
**2.** Венецкий И.Г. , Кильдышев И.С. “Теория вероятностей и математическая статистика” М: 1975.
**3.** Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.
**4.** Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1961.
**5.** Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике, Изд. Ленинградского университета, 1967.
**6.** В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б, Турундаевский “Теория вероятностей и математическая статистика” М: Высшая школа. 1991.
**7.** Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М: 1974.
**8.** Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2001. – 543 с.
**9**. Лисьев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / ВКГТУ. – Усть-Каменогорск, 2001.
**10.** Мхитарян В.С., Трошин А.И.,Адамова Е.В., Шевченко К.К. “Теория вероятностей и математичекая статистика. Учебно-методическое пособие” М: МЭСИ . 2000.
**11.** Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1970.
**12.** Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. Новосибирск,2007.
**13.** Л.И. Трошин ”Теория вероятностей” Учебное пособие. М: 2003.

**14.** Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. – М.: Мир, 1964.
**15.** Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1978.

# Приложение

Таблица 1

**Таблица значений функции** $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| **0,1** | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 1951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| **0,2** | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 1847 | 3836 | 3825 |
| **0,3** | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| **0,4** | 3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| **0,5** | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| **0,6** | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| **0,7** | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| **0,8** | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| **0,9** | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| **1,0** | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| **1,1** | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| **1,2** | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 5781 | 1758 | 1736 |
| **1,3** | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| **1,4** | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| **1,5** | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| **1,6** | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| **1,7** | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| **1,8** | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| **1,9** | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| **2,0** | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| **2,1** | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| **2,2** | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| **2,3** | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| **2,4** | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |

Окончание табл. 1

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2,5** | 0,0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| **2,6** | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| **2,7** | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| **2,8** | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| **2,9** | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| **3,0** | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| **3,1** | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| **3,2** | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| **3,3** | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| **3,4** | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| **3,5** | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| **3,6** | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| **3,7** | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| **3,8** | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| **3,9** | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

Таблица 2

**Таблица значений функции Лапласа:** $\boldsymbol{\Phi(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}}\int_0^{x} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{t^2}}{\mathbf{2}}\right)dt$

| ***x*** | ***Ф*(*x*)** | ***x*** | ***Ф*(*x*)** | ***x*** | ***Ф*(*x*)** | ***x*** | ***Ф*(*x*)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,00** | 0,0000 | **0,31** | 0,1217 | **0,62** | 0,2324 | **0,93** | 0,3238 |
| **0,01** | 0,0040 | **0,32** | 0,1255 | **0,63** | 0,2357 | **0,94** | 0,3264 |
| **0,02** | 0,0080 | **0,33** | 0,1293 | **0,64** | 0,2389 | **0,95** | 0,3289 |
| **0,03** | 0,0120 | **0,34** | 0,1331 | **0,65** | 0,2422 | **0,96** | 0,3315 |
| **0,04** | 0,0160 | **0,35** | 0,1368 | **0,66** | 0,2454 | **0,97** | 0,3340 |
| **0,05** | 0,0199 | **0,36** | 0,1406 | **0,67** | 0,2486 | **0,98** | 0,3365 |
| **0,06** | 0,0239 | **0,37** | 0,1443 | **0,68** | 0,2517 | **0,99** | 0,3389 |
| **0,07** | 0,0279 | **0,38** | 0,1480 | **0,69** | 0,2549 | **1,00** | 0,3413 |
| **0,08** | 0,0319 | **0,39** | 0,1517 | **0,70** | 0,2580 | **1,01** | 0,3438 |
| **0,09** | 0,0359 | **0,40** | 0,1554 | **0,71** | 0,2611 | **0,02** | 0,3461 |
| **0,10** | 0,0398 | **0,41** | 0,1591 | **0,72** | 0,2642 | **1,03** | 0,3485 |
| **0,11** | 0,0438 | **0,42** | 0,1628 | **0,73** | 0,2673 | **1,04** | 0,3508 |
| **0,12** | 0,0478 | **0,43** | 0,1664 | **0,74** | 0,2703 | **1,05** | 0,3531 |
| **0,13** | 0,0517 | **0,44** | 0,1700 | **0,75** | 0,2734 | **1,06** | 0,3554 |
| **0,14** | 0,0557 | **0,45** | 0,1736 | **0,76** | 0,2764 | **1,07** | 0,3577 |
| **0,15** | 0,0596 | **0,46** | 0,1772 | **0,77** | 0,2794 | **1,08** | 0,3599 |
| **0,16** | 0,0636 | **0,47** | 0,1808 | **0,78** | 0,2823 | **1,09** | 0,362 1 |
| **0,17** | 0,0675 | **0,48** | 0,1844 | **0,79** | 0,2852 | **1,10** | 0,3643 |
| **0,18** | 0,0714 | **0,49** | 0,1879 | **0,80** | 0,2881 | **1,11** | 0,3665 |
| **0,19** | 0,0753 | **0,50** | 0,1915 | **0,81** | 0,2910 | **1,12** | 0,3686 |
| **0,20** | 0,0793 | **0,51** | 0,1950 | **0,82** | 0,2939 | **1,13** | 0,3708 |
| **0,21** | 0,0832 | **0,52** | 0,1985 | **0,83** | 0,2967 | **1,14** | 0,3729 |
| **0,22** | 0,0871 | **0,53** | 0,2019 | **0,84** | 0,2995 | **1,15** | 0,3749 |
| **0,23** | 0,0910 | **0,54** | 0,2054 | **0,85** | 0,3023 | **1,16** | 0,3770 |
| **0,24** | 0,0948 | **0,55** | 0,2088 | **0,86** | 0,305 1 | **1,17** | 0,3790 |
| **0,25** | 0,0987 | **0,56** | 0,2123 | **0,87** | 0,3078 | **1,18** | 0,3810 |
| **0,26** | 0,1026 | **0,57** | 0,2157 | **0,88** | 0,3106 | **1,19** | 0,3830 |
| **0,27** | 0,1064 | **0,58** | 0,2190 | **0,89** | 0,3133 | **1,20** | 0,3849 |
| **0,28** | 0,1103 | **0,59** | 0,2224 | **0,90** | 0,3159 | **1,21** | 0,3869 |
| **0,29** | 0,1141 | **0,60** | 0,2257 | **0,91** | 0,3186 | **1,22** | 0,3888 |
| **0,30** | 0,1179 | **0,61** | 0,2291 | **0,92** | 0,3212 | **1,23** | 0,3907 |

Окончание табл. 2

| *x* | *Φ*(*x*) | *x* | *Φ*(*x*) | *x* | *Φ*(*x*) | *x* | *Φ*(*x*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,24** | 0,3925 | **1,59** | 0,4441 | **1,94** | 0,4738 | **2,58** | 0,4951 |
| **1,25** | 0,3944 | **1,60** | 0,4452 | **1,95** | 0,4744 | **2,60** | 0,4953 |
| **1,26** | 0,3962 | **1,61** | 0,4463 | **1,96** | 0,4750 | **2,62** | 0,4956 |
| **1,27** | 0,3980 | **1,62** | 0,4474 | **1,97** | 0,4756 | **2,64** | 0,4959 |
| **1,28** | 0,3997 | **1,63** | 0,4484 | **1,98** | 0,4761 | **2,66** | 0,4961 |
| **1,29** | 0,4015 | **1,64** | 0,4495 | **1,99** | 0,4767 | **2,68** | 0,4963 |
| **1,30** | 0,4032 | **1,65** | 0,4505 | **2,00** | 0,4772 | **2,70** | 0,4965 |
| **1,31** | 0,4049 | **1,66** | 0,4515 | **2,02** | 0,4783 | **2,72** | 0,4967 |
| **1,32** | 0,4066 | **1,67** | 0,4525 | **2,04** | 0,4793 | **2,74** | 0,4969 |
| **1,33** | 0,4082 | **1,68** | 0,4535 | **2,06** | 0,4803 | **2,76** | 0,4971 |
| **1,34** | 0,4099 | **1,69** | 0,4545 | **2,08** | 0,4812 | **2,78** | 0,4973 |
| **1,35** | 0,4115 | **1,70** | 0,4554 | **2,10** | 0,4821 | **2,72** | 0,4967 |
| **1,36** | 0,4131 | **1,71** | 0,4564 | **2,12** | 0,4830 | **2,74** | 0,4969 |
| **1,37** | 0,4147 | **1,72** | 0,4573 | **2,14** | 0,4838 | **2,76** | 0,4971 |
| **1,38** | 0,4162 | **1,73** | 0,4582 | **2,16** | 0,4846 | **2,78** | 0,4973 |
| **1,39** | 0,4177 | **1,74** | 0,4591 | **2,18** | 0,4854 | **2,80** | 0,4974 |
| **1,40** | 0,4192 | **1,75** | 0,4599 | **2,20** | 0,4861 | **2,82** | 0,4976 |
| **1,41** | 0,4207 | **1,76** | 0,4608 | **2,22** | 0,4868 | **2,84** | 0,4977 |
| **1,42** | 0,4222 | **1,77** | 0,4616 | **2,24** | 0,4875 | **2,86** | 0,4979 |
| **1,43** | 0,4236 | **1,78** | 0,4625 | **2,26** | 0,4881 | **2,88** | 0,4980 |
| **1,44** | 0,4251 | **1,79** | 0,4633 | **2,28** | 0,4887 | **2,90** | 0,4981 |
| **1,45** | 0,4265 | **1,80** | 0,4641 | **2,30** | 0,4893 | **2,92** | 0,4982 |
| **1,46** | 0,4279 | **1,81** | 0,4649 | **2,32** | 0,4898 | **2,94** | 0,4984 |
| **1,47** | 0,4292 | **1,82** | 0,4656 | **2,34** | 0,4904 | **2,96** | 0,4985 |
| **1,48** | 0,4306 | **1,83** | 0,4664 | **2,36** | 0,4909 | **2,98** | 0,4986 |
| **1,49** | 0,4319 | **1,84** | 0,4671 | **2,38** | 0,4913 | **3,00** | 0,49865 |
| **1,50** | 0,4332 | **1,85** | 0,4678 | **2,40** | 0,4918 | **3,20** | 0,49931 |
| **1,51** | 0,4345 | **1,86** | 0,4686 | **2,42** | 0,4922 | **3,40** | 0,49966 |
| **1,52** | 0,4357 | **1,87** | 0,4693 | **2,44** | 0,4927 | **3,60** | 0,499841 |
| **1,53** | 0,4370 | **1,88** | 0,4699 | **2,46** | 0,4931 | **3,80** | 0,499928 |
| **1,54** | 0,4382 | **1,89** | 0,4706 | **2,48** | 0,4934 | **4,00** | 0,499968 |
| **1,55** | 0,4394 | **1,90** | 0,4713 | **2,50** | 0,4938 | **4,50** | 0,499997 |
| **1,56** | 0,4406 | **1,91** | 0,4719 | **2,52** | 0,4941 | **5,00** | 0,499997 |
| **1,57** | 0,4418 | **1,92** | 0,4726 | **2,54** | 0,4945 | | |
| **1,58** | 0,4429 | **1,93** | 0,4732 | **2,56** | 0,4948 | | |

Таблица 3

**Значение функции:** $P_n(к) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ .

| $k$ \ $\lambda$ | **01** | **0,2** | **0,3** | **0,4** | **0,5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 |
| **1** | 0,0905 | 0,1637 | 0,2223 | 0,2681 | 0,3033 |
| **2** | 0,0045 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 |
| **3** | 0,0002 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 |
| **4** | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0016 |
| **5** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |
| **6** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| **7** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $k$ \ $\lambda$ | **0,6** | **0,7** | **0,8** | **0,9** | |
| **0** | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 | |
| **1** | 0,329, | 0,3476 | 0,3595 | 0,3659 | |
| **2** | 0,0988 | 0,1216 | 0,1438 | 0,1647 | |
| **3** | 0,0198 | 0,0284 | 0,0383 | 0,0494 | |
| **4** | 0,0030 | 0,0050 | 0,0077 | 0,0111 | |
| **5** | 0,0003 | 0,0007 | 0,0012 | 0,0020 | |
| **6** | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | |
| **7** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | |
| $k$ \ $\lambda$ | **1,0** | **2,0** | **3,0** | **4,0** | **5,0** |
| **0** | 0,3679 | 0,1353 | 0,0498 | 0,0183 | 0,0067 |
| **1** | 0,3679 | 0,2707 | 0,1494 | 0.0733 | 0,0337 |
| **2** | 0,1839 | 0,2707 | 0,2240 | 0,1465 | 0,0842 |
| **3** | 0,0613 | 0,1805 | 0,2240 | 0,1954 | 0,1404 |
| ***4*** | 0,0153 | 0,0902 | 0,1681 | 0,1954 | 0,1755 |
| **5** | 0,0031 | 0,0361 | 0,1008 | 0,1563 | 0,1755 |
| **6** | 0,0005 | 0,0120 | 0,0504 | 0,1042 | 0,1462 |
| **7** | 0,0001 | 0,0034 | 0,0216 | 0,0595 | 0,1045 |
| **8** | 0,0000 | 0,0009 | 0,0081 | 0,0298 | 0,0653 |
| **9** | 0,0000 | 0,0002 | 0,0027 | 0,0132 | 0,0363 |
| **10** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0008 | 0,0053 | 0,0181 |
| **11** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0019 | 0,0082 |
| **12** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0034 |
| **13** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0013 |
| **14** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0005 |
| **15** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 |
| **16** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Окончание табл. 3

| $k$ \ $\lambda$ | **6,0** | **7,0** | **8,0** | **9,0** | **10,0** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0001 |
| **1** | 0,0149 | 0,0064 | 0,0027 | 0,0011 | 0,0005 |
| **2** | 0,0446 | 0,0223 | 0,0107 | 0,0050 | 0,0023 |
| **3** | 0,0892 | 0,0521 | 0,0286 | 0,0150 | 0,0076 |
| **4** | 0,1339 | 0,0912 | 0,0572 | 0,0337 | 0,0189 |
| **5** | 0,1606 | 0,1277 | 0,0916 | 0,0607 | 0,0378 |
| **6** | 0,1606 | 0,1490 | 0,1221 | 0,0911 | 0,0631 |
| **7** | 0,1377 | 0,1490 | 0,1396 | 0,1171 | 0,0901 |
| **8** | 0,1033 | 0,1304 | 0,1396 | 0,1318 | 0,1126 |
| **9** | 0,0689 | 0,1014 | 0,1241 | 0,1318 | 0,1251 |
| **10** | 0,0413 | 0,0710 | 0,0993 | 0,1186 | 0,1251 |
| **11** | 0,0225 | 0,0452 | 0,0722 | 0,0970 | 0,1137 |
| **12** | 0,0113 | 0,0264 | 0,0481 | 0,0728 | 0,0948 |
| **13** | 0,0052 | 0,0142 | 0,0296 | 0,0504 | 0,1729 |
| **14** | 0,0022 | 0,0071 | 0,0169 | 0,0324 | 0,0521 |
| **15** | 0,0009 | 0,0033 | 0,0090 | 0,0194 | 0,0347 |
| **16** | 0,0003 | 0,0015 | 0,0045 | 0,0109 | 0,0217 |
| **17** | 0,0001 | 0,0006 | 0,0021 | 0,0058 | 0,0128 |
| **18** | 0,0000 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0029 | 0,0071 |
| **19** | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0014 | 0,0037 |
| **20** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0019 |
| **21** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0009 |
| **22** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 |
| **23** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 |
| **24** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 |
| **25** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |