РЭУ.РФ
РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Г.В. ПЛЕХАНОВА

С. Л. Саакян

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Г. В. ПЛЕХАНОВА

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЛИАЛ

С. Л. Саакян

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть II

ГЕОМЕТРИЯ

Под редакцией кандидата физ.-мат. наук Мелконян А.А.

Ереван-2024

Рекомендовано к изданию решением Ученого совета Ереванского филиала РЭУ им. Г.В. Плеханова

Редактор: к.ф-м.н., доцент, зав. кафедрой Информационные технологии и гуманитарные науки Ереванского филиала РЭУ им. Г.В. Плеханова – Мелконян А.А.

Алгебра и геометрия в примерах и задачах. Часть II Геометрия. Учебное пособие / С.Л. Саакян – Ереванский филиал РЭУ им. Г.В. Плеханова, Ереван: изд. ООО «ИНФОКОПИ», 2024, 134 стр.

Учебное пособие в двух томах предназначено для студентов первых курсов колледжей. В простой и наглядной форме представлены основные понятия школьного курса по алгебре и геометрии. Также имеется приложение, в котором собраны контрольные тестовые задания по всем разделам, а также завершающие тесты по всему курсу, изложенному в пособии.

Оглавление

1. Начальные геометрические сведения

1.1. Общие понятия

Прямая и отрезок

<u>Точка.</u> На чертеже точки обозначают заглавными латинскими буквами (Рис. 1.1.1):

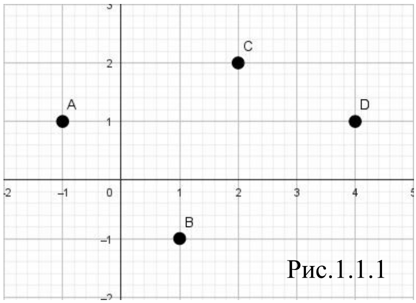


Рис.1.1.1

<u>Прямая.</u> Линия простирающаяся бесконечно в обе стороны называется прямой. Обычно прямые обозначают строчными латинскими буквами.

Прямую, на которой отмечены две точки, например, A и B иногда обозначают двумя буквами AB или BA (Рис. 1.1.2):

Две различные прямые называются пересекающимися, если они имеют общую точку. Точка пересечения единственна: если две прямые имеют две общие точки, то они совпадают (Рис. 1.1.3):

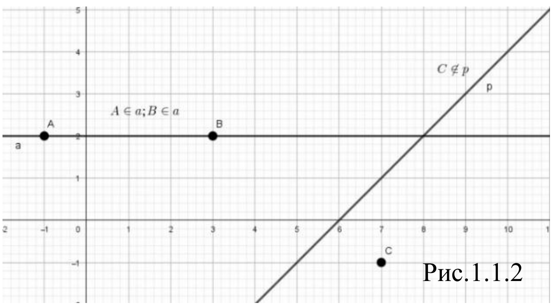


Рис.1.1.2

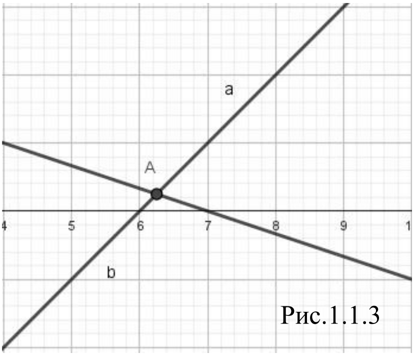


Рис.1.1.3

<u>Отрезок.</u> Часть прямой ограниченная двумя точками называется отрезком. Точки A и B называются концами отрезка (Рис. 1.1.4.):

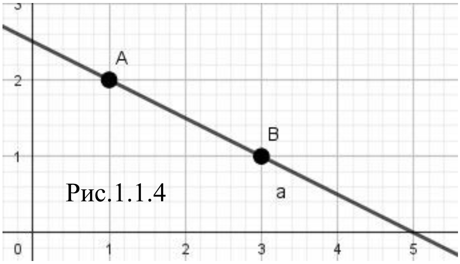


Рис.1.1.4

<u>Середина отрезка.</u> Точка, которая делит отрезок на два равных отрезка называется серединой отрезка (Рис. 1.1.5.):

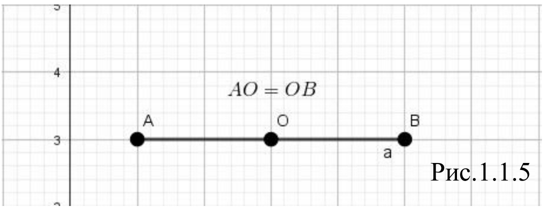


Рис.1.1.5

Луч и угол

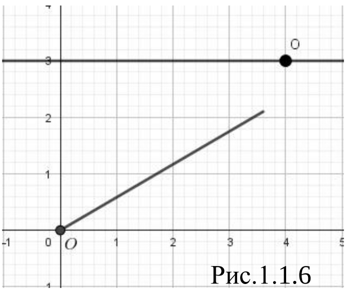


Рис.1.1.6

<u>Луч.</u> Часть прямой, ограниченная с одной стороны называется лучом (Рис. 1.1.6):

<u>Угол.</u> Угол — геометрическая фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), выходящими из одной точки (которая называется вершиной угла) (Рис. 1.1.7):

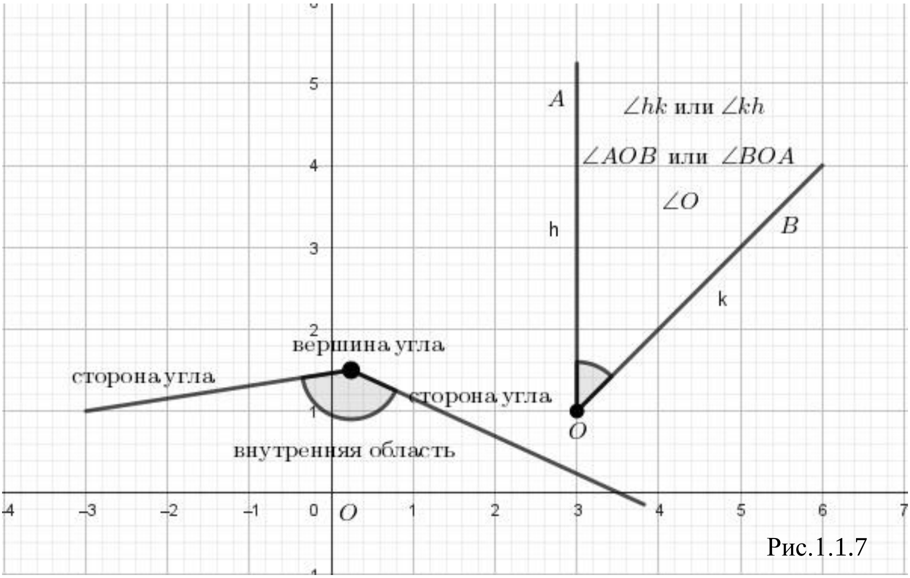


Рис.1.1.7

<u>Развернутый угол.</u>

Развернутый угол - это угол, стороны которого составляют прямую.

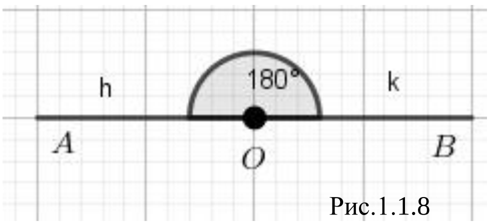


Рис.1.1.8

Градусная мера развернутого угла равна 180^0 (Рис. 1.1.8):

За единицу измерения углов принимают один градус $\left(1^0\right)$ – угол, равный $\dfrac{1}{180}$ части развёрнутого угла; $\dfrac{1}{60}$ часть градуса называется минутой, $\dfrac{1}{60}$ часть минуты называется секундой $(1^0 = 60', 1' = 60'')$.

Угол называется прямым, если он равен $90°$, острым, если он меньше $90°$, тупым, если он больше $90°$, но меньше $180°$. (Рис. 1.1.9):

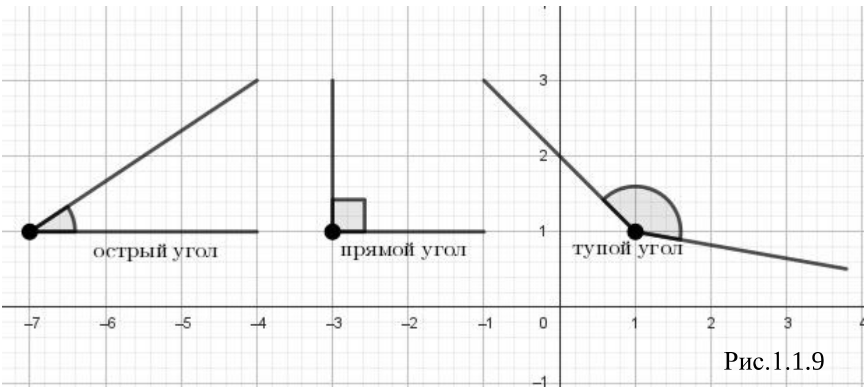


Рис.1.1.9

Вертикальные углы. Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (Рис. 1.1.10):

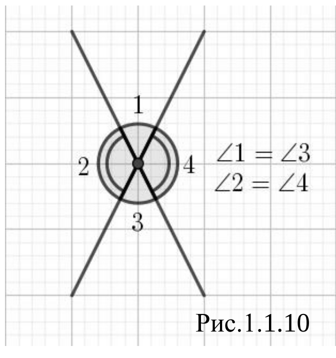


Рис.1.1.10

Смежные углы. Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными (Рис. 1.1.11): .

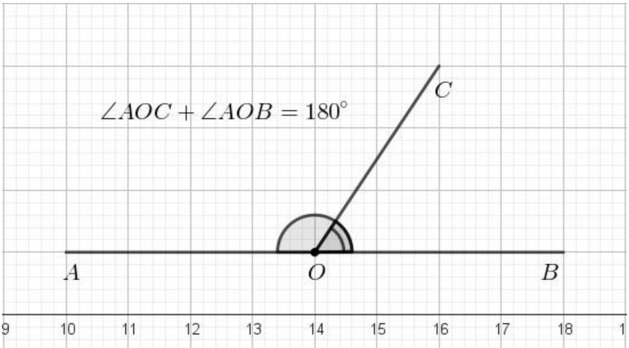


Рис.1.1.11

Биссектриса угла. Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется биссектрисой угла (Рис. 1.1.12):.

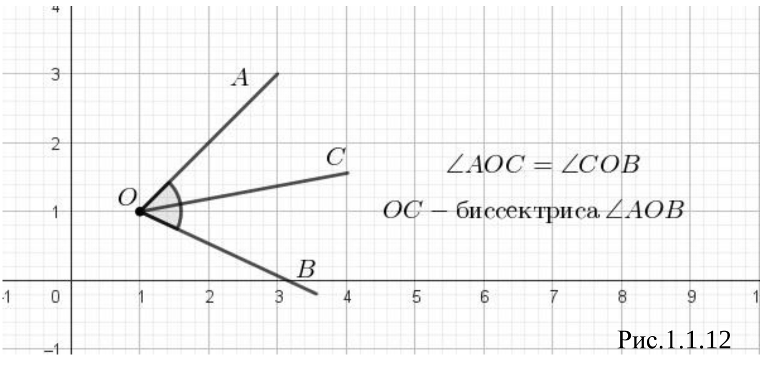


Рис.1.1.12

1.2. Перпендикулярные прямые

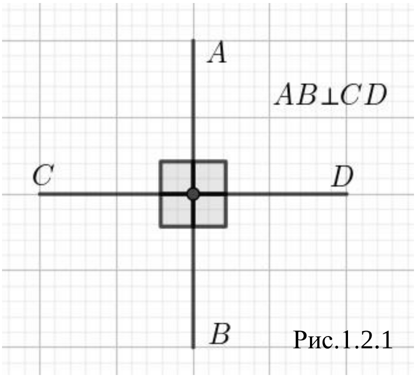


Рис.1.2.1

Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла (Рис. 1.2.1):

Свойство. Две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются (Рис. 1.2.2):

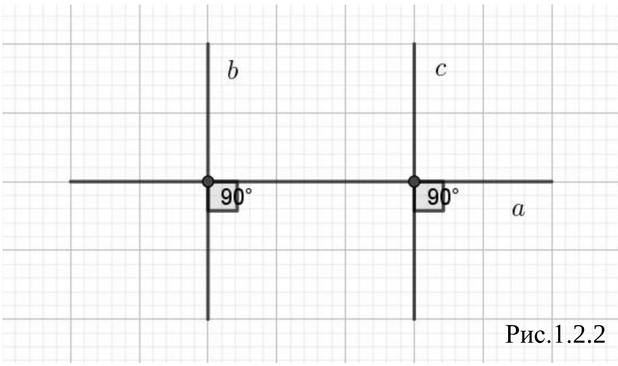


Рис.1.2.2

Перпендикуляр к прямой

Теорема. Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Отрезок AH - перпендикуляр к прямой a (Рис. 1.2.3):

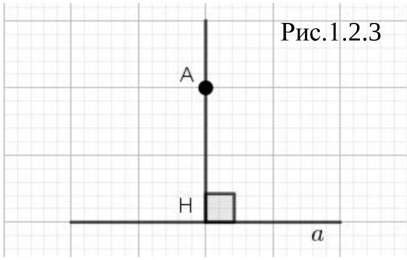
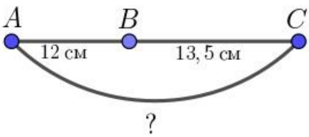


Рис.1.2.3

Упражнения

1. Точки $A, B, и\ C$ лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12см,\ BC = 13,5см$. Какой может быть длина отрезка AC?

I вариант



$A, B, C \in a$
$AB = 12$ см
$BC = 13,5$ см

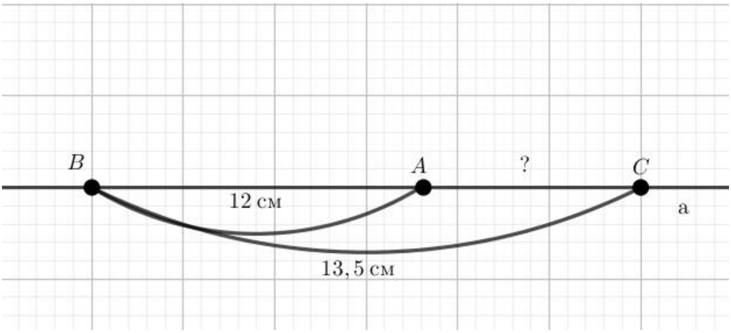
Найти AC

Решение

$$AC = AB + BC$$
$$AC = 12 + 13,5 = 25,5(см)$$

Ответ: $25,5см$

II вариант

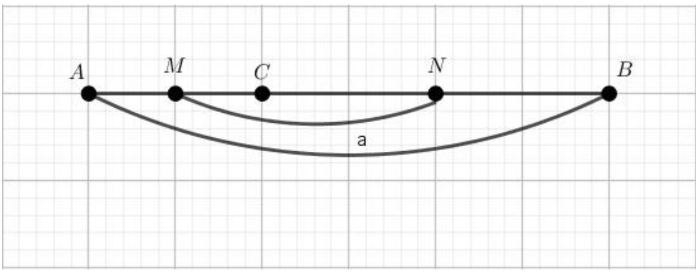


Решение

$AC = BC - AB$
$AC = 13{,}5 - 12 = 1{,}5\,(см)$

Ответ: $1{,}5 см$

2. Дан отрезок длиной a. Отрезок разделен произвольной точкой C на два отрезка AC и CB. Точки M и N середины этих отрезков соответственно. Найти MN.



Дано:

$AB = a$

$AM = MC,\ CN = NB$

Найти MN?

Решение

Обозначим $AC = x, \quad CB = a - x$

$$AM = MC = \frac{x}{2}, \quad CN = NB = \frac{a-x}{2}$$

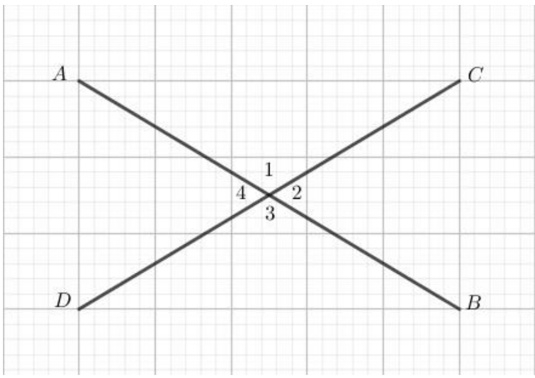
$$MN = MC + CN$$

$$MN = \frac{x}{2} + \frac{a-x}{2} = \frac{\cancel{x} + a - \cancel{x}}{2} = \frac{a}{2}$$

Ответ: $\frac{a}{2}$

3. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если а) сумма двух из них равна 114^0;

б) сумма трех углов равна 220^0.



Дано:

а) $\angle 1 + \angle 3 = 114^0$

б) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 220^0$

Найти $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$

Решение

а) $\angle 1 = \angle 3$ как вертикальные углы.

Т.к. $\angle 1 + \angle 3 = 114^0$, то $\angle 1 = \angle 3 = 114^0 : 2 = 57^0$.

$\angle 1$ и $\angle 2$ смежные углы $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 180^0$.

$\angle 2 = 180^0 - 57^0 = 123^0$.

$\angle 4 = \angle 2$ как вертикальные углы.

Ответ: 57^0, 57^0, 123^0, 123^0

Решение

б) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^0$.

Так как $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 220^0$, то

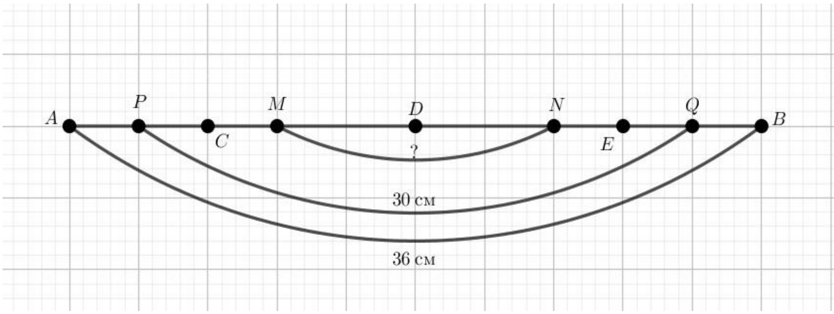
$\angle 2 = \angle 4 = 140^0$ как вертикальные углы

$\angle 1$ и $\angle 2$ смежные углы $\Rightarrow \angle 1 = 180^0 - 140^0 = 40^0$.

$\angle 3 = \angle 1 = 40^0$ как вертикальные углы.

Ответ: 40^0, 40^0, 140^0, 140^0

4. Отрезок длиной $36 см$ разделен на четыре не равные части. Расстояние между серединами крайних частей равно $30 см$ Найдите расстояние между серединами средних частей.



Дано:

$AB = 36 см$

$AP = PC,\ EQ = QB$

$CM = MD,\ DN = NE$

$PQ = 30 см$

Найти $MN - ?$

Решение

$AP + QB = 36 - 30 = 6 (см)$

Так как $AP + PC = EQ = QB,$ то $PC + EQ = 6 см$

Так как $PQ = 30 см$ и $PC + EQ = 6 см$, то $CE = 30 - 6 = 26 (см)$

Обозначим $CD = x,\ DE = 24 - x$

$$CM = MD = \frac{x}{2},\ DN = NE = \frac{24 - x}{2}$$

$MN = MD + DN$

$$MN=\frac{x}{2}+\frac{24-x}{2}=\frac{\cancel{x}+24-\cancel{x}}{2}=\frac{24}{2}=12(см)$$

Ответ: $12(см)$

Упражнения

1. Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD=7см$, $MD=16см$. Каким может быть расстояние BM.

2. Отрезок длиной $28см$, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно $16см$. Найдите длину среднего отрезка.

3. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB=78^0$, а угол AOC на 18^0 меньше угла BOC.

4. Угол AOB является частью угла AOC. Известно, что $\angle AOC=108^0$, $\angle AOB=3\cdot\angle BOC$. Найдите угол AOB.

5. Найдите смежные углы hk и kl, если:

а) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47^0 18'$;

б) $\angle hk=3\angle kl$;

в) $\angle hk:\angle kl=5:4$.

6. Точка N лежит на отрезке MP. Расстояние между точками M и P равно $24 см$, а расстояние между точками N и M в два раза больше расстояния между точками N и P. Найдите расстояние:

а) между точками N и P;
б) между точками N и M.

7. Отрезок длины m разделен:
а) на три равные части;
б) на пять равных частей.
Найдите расстояние между серединами крайних частей.

8. Известно, что $\angle AOB = 35^0, \angle BOC = 50^0$. Найдите угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

9. Угол hk равен 120^0, а угол hm равен 150^0. Найдите угол km. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

10. Найдите смежные углы, если
а) один из них на 45^0 больше другого.
б) их разность равна 35^0.

11. Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

2. Треугольники

2.1 Общие понятия

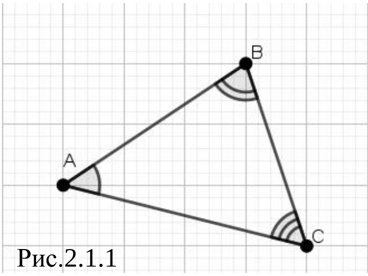


Рис.2.1.1

Треугольник (ΔABC) — геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, соединенных между собой отрезками (Рис. 2.1.1):

Точки A, B, C, называются вершинами треугольника, отрезки AB, BC, AC - сторонами треугольника.

Углы треугольника обозначаются следующим образом: $\angle A,\ \angle B,\ \angle C$.

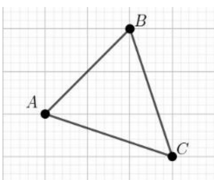
Сумма длин сторон треугольника называется его <u>периметром</u>:

$$P_{ABC} = AB + BC + AC.$$

<u>Типы треугольников:</u>

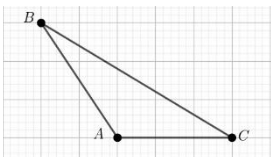
Треугольники бывают:

остроугольные



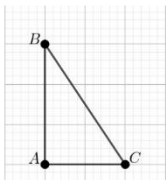
$\angle A < 90^0$
$\angle B < 90^0$
$\angle C < 90^0$

тупоугольные



$\angle A > 90^0$
$\angle B < 90^0$
$\angle C < 90^0$

прямоугольные



$\angle A = 90^0$
$\angle C < 90^0$
$\angle B < 90^0$

2.2 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

Медиана треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны называется медианой треугольника (Рис. 2.2.1):

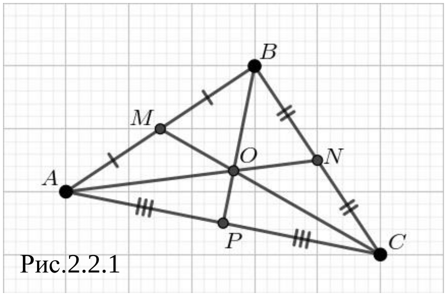


Рис.2.2.1

Свойство. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется центром тяжести треугольника, и делятся этой точкой на две части в отношении $2:1$, считая от вершины.

$$AO = 2ON$$
$$BO = 2OP$$
$$CO = 2OM$$

Биссектриса треугольника

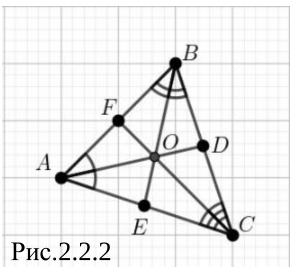


Рис.2.2.2

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника (Рис. 2.2.2):

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Высота треугольника

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону. В зависимости от типа треугольника высота может содержаться внутри треугольника, совпадать с его стороной или проходить вне треугольника у тупоугольного треугольника (Рис. 2.2.3):

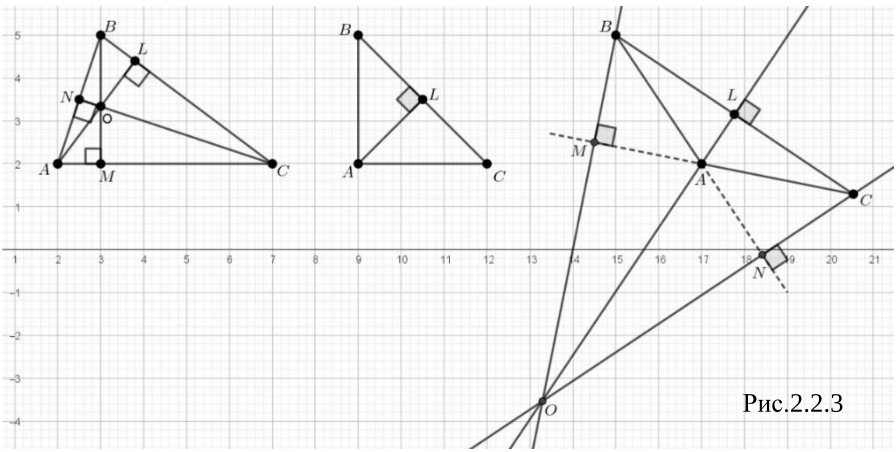


Рис.2.2.3

Теорема. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (ортоцентре).

Равнобедренный треугольник

Треугольник называется равнобедренным, если его две стороны равны (Рис. 2.2.4):

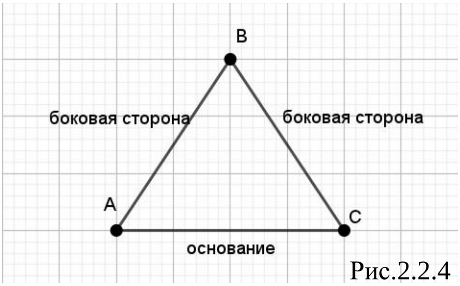


Рис.2.2.4

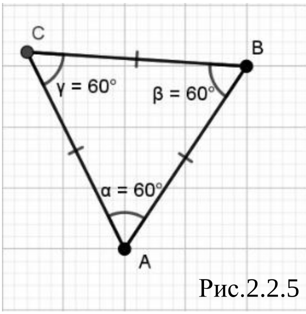


Рис.2.2.5

Треугольник, все стороны которого равны, называется равносторонним (Рис. 2.2.5):

$$AB = BC = AC$$

$$\angle A = \angle B = \angle C$$

Свойства равнобедренного треугольника

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой (Рис. 2.2.6)

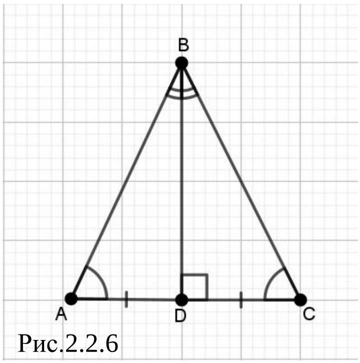


Рис.2.2.6

Следствие 1. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.

Следствие 2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.

2.3 Признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников

Теорема. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (Рис. 2.3.1):

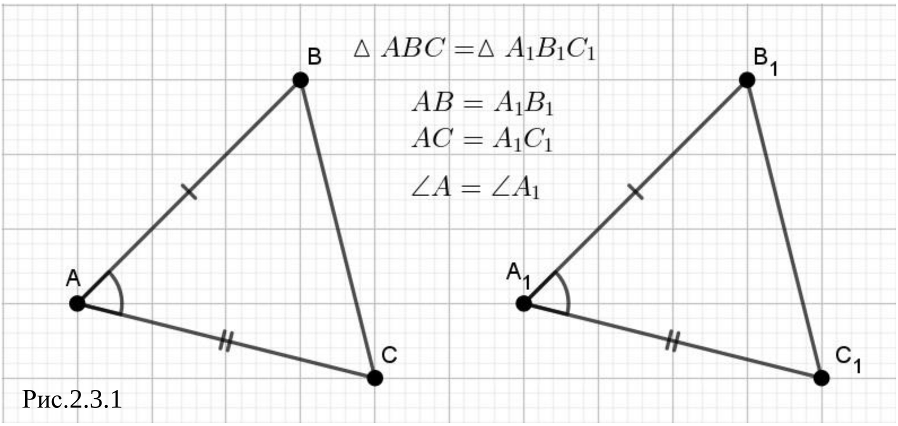


Рис.2.3.1

Второй признак равенства треугольников

<u>Теорема.</u> Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (Рис. 2.3.2):

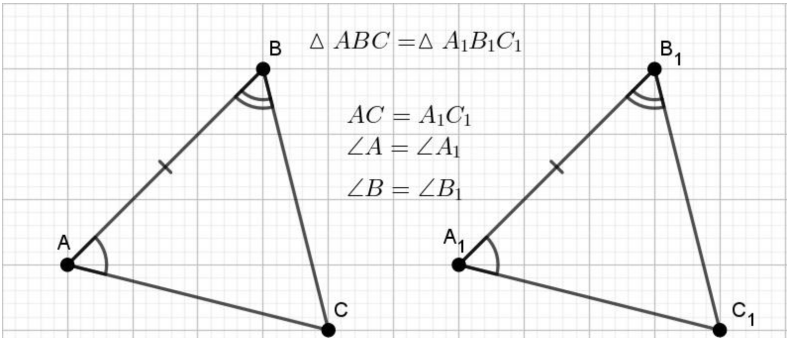


Рис.2.3.2

Третий признак равенства треугольников

<u>Теорема.</u> Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (Рис. 2.3.3):

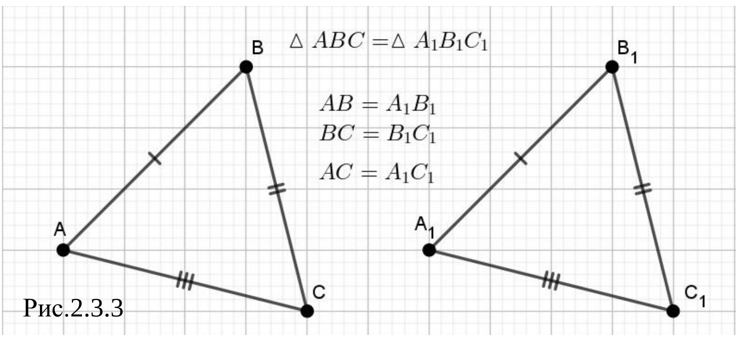
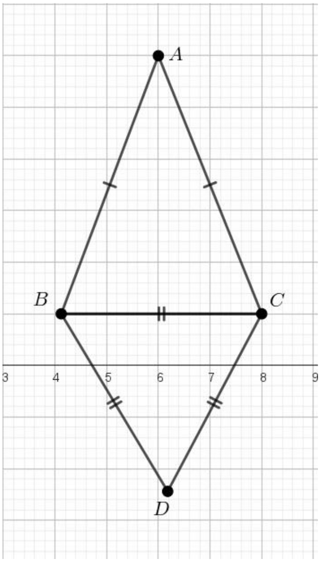


Рис.2.3.3

Упражнения

1. Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен $40\,см$, а периметр равностороннего треугольника BCD равен $45\,см$. Найдите стороны AB и BC.



Дано:

$\Delta ABC, AB = AC$

$\Delta BCD, BC = CD = BD$

$P_{ABC} = 40\,см$

$P_{BCD} = 45\,см$

Найти AB и BC

Решение

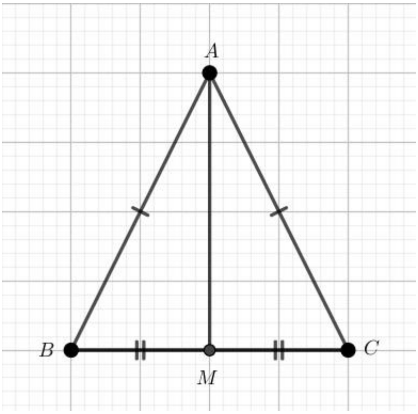
Так как $P_{BCD} = 45\,см$,то $BC = CD = BD = 45:3 = 15(см)$

$AB + AC = 40 - 15 = 25(см)$

$AB = AC = 25:2 = 12,5(см)$

Ответ: $AB = 12,5(см)$, $BC = 15(см)$

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. Найдите медиану AM, если периметр треугольника ABC равен $32\,см$, а периметр треугольника ABM равен $24\,см$.



Дано:

$\Delta ABC, AB = AC$

AM – медиана

$P_{ABC} = 32 см,\ P_{ABM} = 24 см$

Найти AM

Решение

Так как AM медиана,то $BM = MC$

$P_{ABC} = 32 см$

$BM = MC \Rightarrow AB + BM = AC + MC = 32:2 = 16(см)$

$AB = AC$

Так как $P_{ABM} = 24 см$ и $AB + BM = 16 см,$ то

$M = 24 - 16 = 8(см)$

Ответ: $AM = 8 см$

3. Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b, равны. Точка O – середина отрезка NQ.

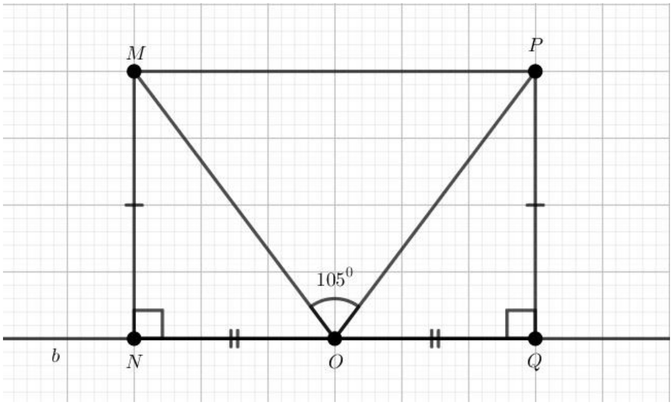
а) Докажите, что $\angle OMP = \angle OPM$;

б) найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP = 105^0$.

Дано:

$M \notin b, P \notin b;$
$MN \perp b, PQ \perp b;$
$MN = PQ, NO = OQ;$
$\angle MOP = 105^0$

а) Доказать, что $\angle OMP = \angle MPO$



б) Найти $\angle NOM$

Решение

а) Рассмотрим ΔMNO и ΔPOQ.

$MN = PQ$ по условию

$NO = QO$ по условию

$\Rightarrow \Delta MNO = \Delta POQ$

$\angle MNO = \angle PQO = 90^0 (MN \perp b,\ PQ \perp b)$ по I признаку равенства треугольников

$$\Downarrow$$

$$MO = OP \quad \angle MON = \angle POQ$$

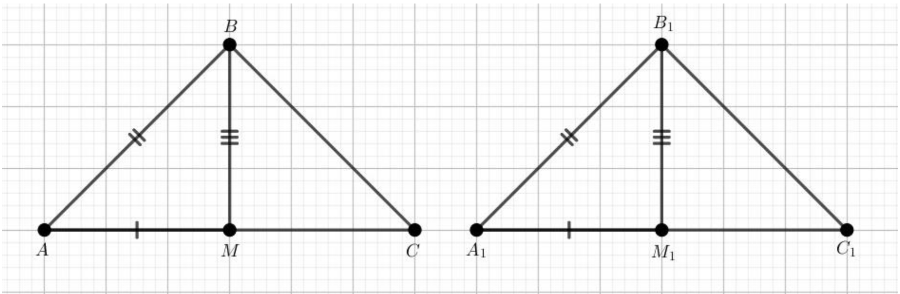
$MO = OP \Rightarrow \Delta MOP =$ равнобедренный треугольник $\Rightarrow \angle OMP = \angle MPO$

б) Так как $\angle MOP = 105^0$ и

$$\angle MON = \angle POQ = \frac{180^0 - 105^0}{2} = \frac{75^0}{2} = \frac{74^0 60^{'}}{2} = 37^0 30^{'}$$

Ответ: б) $37^0 30^{'}$

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны; $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

BM и B_1M_1 – медианы

$BM = B_1M_1$

$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1$

Доказать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство

Так как BM и B_1M_1 – медианы и $AC = A_1C_1$ то

$AM = MC = A_1M_1 = M_1C_1$

Рассмотрим ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$

$AB = A_1B_1$ по условию

$BM = B_1M_1$ по условию $\Rightarrow \Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ по III признаку равенства Δ-ов

$AM = A_1M_1$ по доказанному

$\Downarrow$

$\angle A = \angle A_1$

Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$ по условию

$AC = A_1B_1$ по условию $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по I признаку равенства Δ-ов

$\angle A = \angle A_1$ по доказанному

5. Сторона AB треугольника ABC равна $17 см$, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на $10 см$ меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

6. Отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta CDA$.

7. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой а равны.

а) Докажите, что $\Delta ABD = \Delta CDB$;

б) найдите ΔABC, если $\Delta ADB = 44^0$.

8. В равнобедренном треугольнике основание в два раза меньше боковой стороны, а периметр равен $50 см$. Найдите стороны треугольника.

9. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

10. Медиана AM треугольника ABC равна отрезку BM. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов.

11. Отрезки AB и CD пересекаются в середине O отрезка AB, $\angle OAD = \angle OBC$.

а) Докажите, что $\Delta CBO = \Delta DAO$;

б) найдите BC и CO, если $CD = 26 см, AD = 15 см$.

12. В треугольнике ABC $\angle A = 38^0$, $\angle B = 110^0$, $\angle C = 32^0$. На стороне AC отмечены точки D и E, так, что точка D может на отрезке $AE, BD = DA, BE = EC$. Найдите $\angle DBE$.

13. На биссектрисе угла A взята точка D, а на сторонах этого угла – точки B и C такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

14. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN – равнобедренный.

15. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведенные к соответственно равным сторонам, равны.

3. Параллельные прямые

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются (Рис. 3.1):

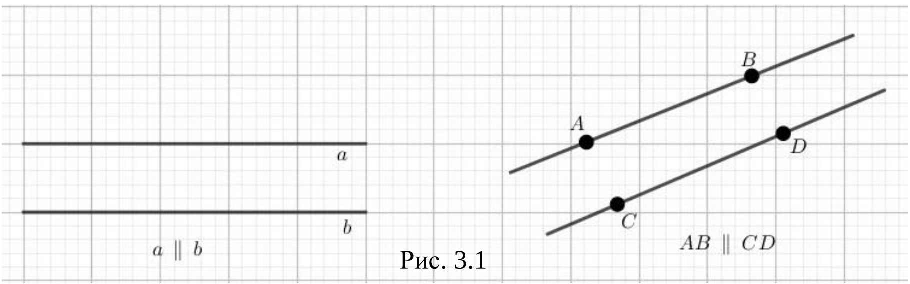


Рис. 3.1

Прямая C называется секущей по отношению к прямым a и b, если она пересекает их двух точках (Рис. 3.2):

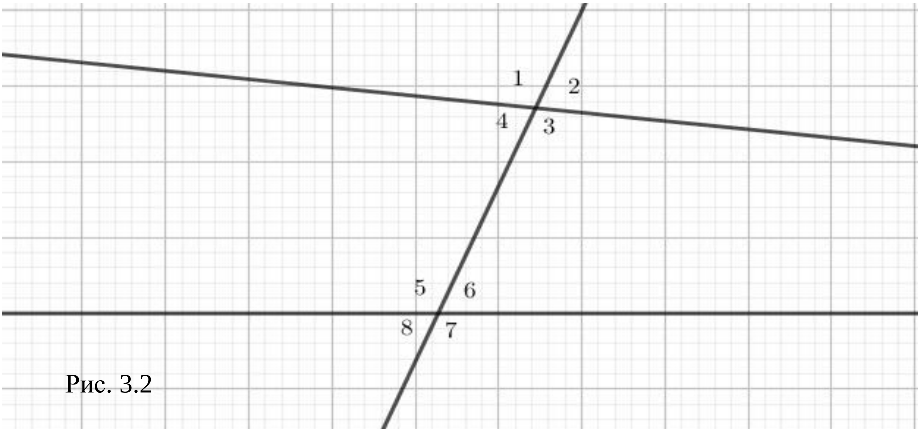


Рис. 3.2

Накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6;

Односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;

Соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8;

2 и 6, 3 и 7.

3.1. Признаки параллельности двух прямых

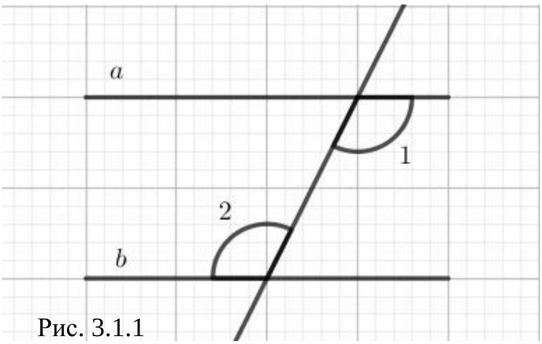


Рис. 3.1.1

Теорема 1. Если при пересечение двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (Рис. 3.1.1): если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \| b$

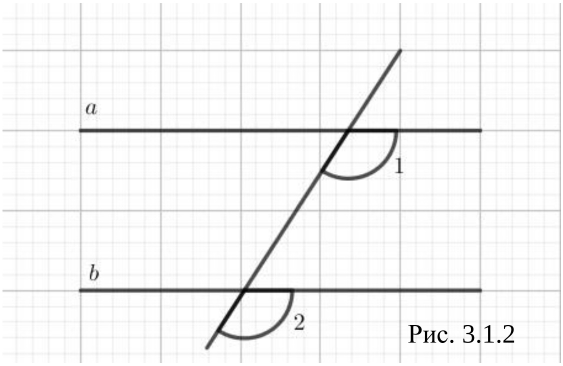


Рис. 3.1.2

<u>Теорема 2.</u> Если при пересечение двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны (Рис. 3.1.2): если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

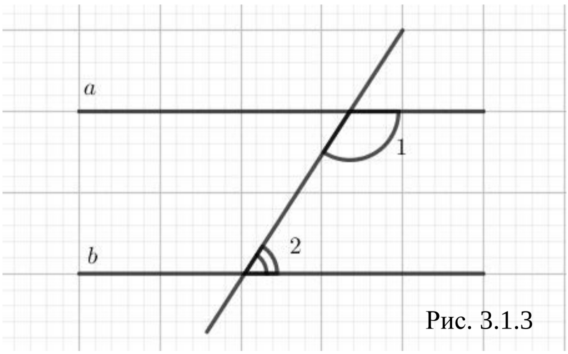


Рис. 3.1.3

<u>Теорема 3.</u> Если при пересечение двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180^0, то прямые параллельны (Рис. 3.1.3): если $\angle 1 + \angle 2 = 180,$ то $a \parallel b$.

Аксиома параллельных прямых

Утверждения о свойствах геометрических фигур, принимающиеся в качестве исходных положений, на основе которых доказываются теоремы называются аксиомами.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (Рис. 3.1.4):

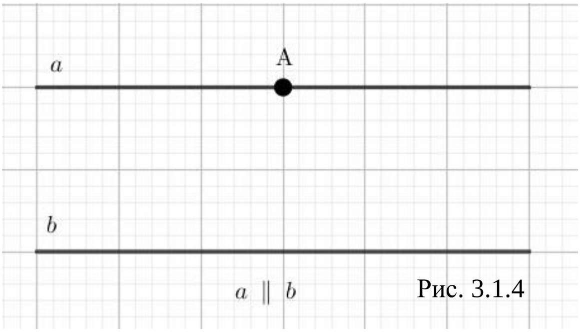


Рис. 3.1.4

Следствия аксиом параллельных прямых

Утверждения, которые выводятся непосредственно из аксиом или теорем называются следствиями.

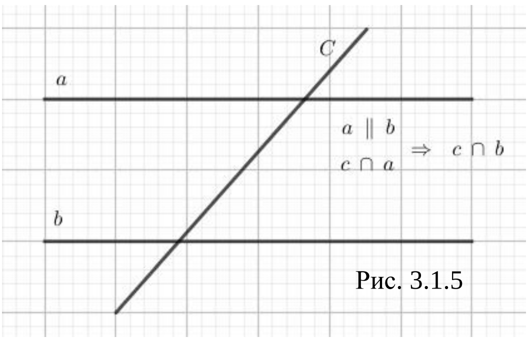


Рис. 3.1.5

Следствие 1. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую (Рис. 3.1.5):.

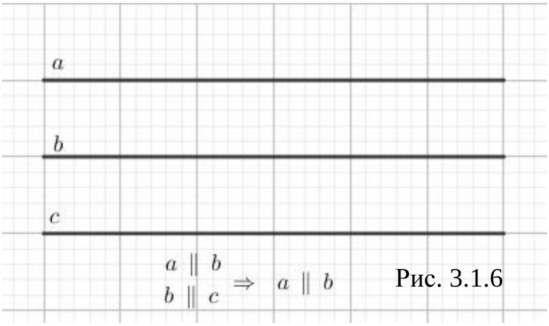


Рис. 3.1.6

Следствие 2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (Рис. 3.1.6):

Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

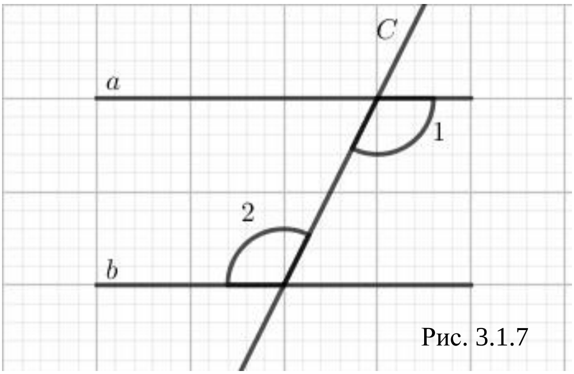


Рис. 3.1.7

Теорема 1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны (Рис. 3.1.7): если $a \| b$, то $\angle 1 = \angle 2$.

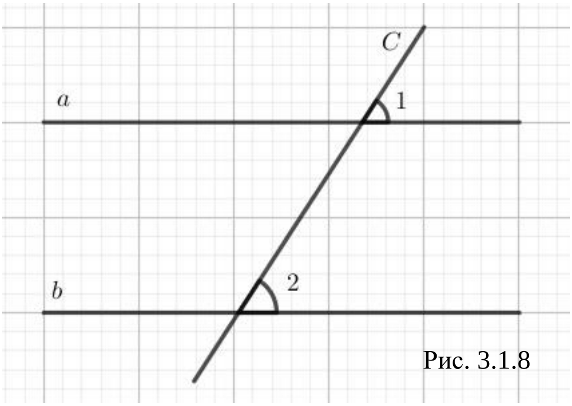


Рис. 3.1.8

Теорема 2. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны (Рис. 3.1.8): если $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2$.

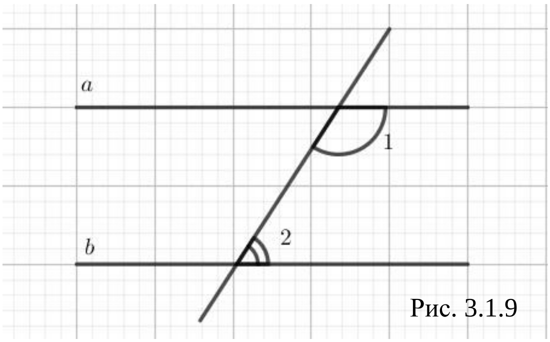
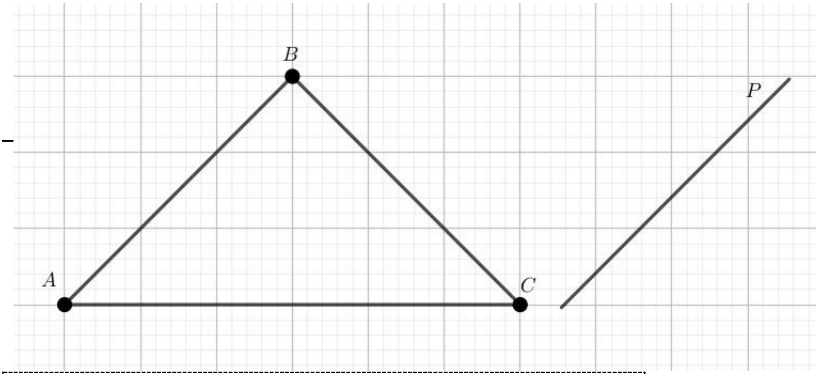


Рис. 3.1.9

Теорема 3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180^0 (Рис. 3.1.9): если $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$.

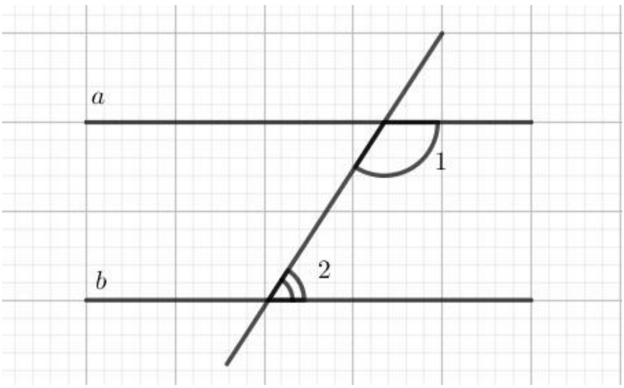
Упражнения

1. Прямая P параллельна стороне AB треугольника ABC. Докажите, что прямые BC и AC пересекают прямую P.



Дано:	
ΔABC, $P \parallel AB$	
$BC \cap P$ и $AC \cap P$	
Доказательство:	
$BC \cap AB = B$ $AB \parallel P$	$\Rightarrow BC \cap P$ по следствию 1
$AC \cap AB = A$ $AB \parallel P$	$\Rightarrow AC \cap P$ по следствию 1

2. Разность двух односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 50^0. Найти эти углы.



Доказательство:

Так как $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

$\angle 1 = 180^0 - \angle 2$.

Значение $\angle 1$ подставим в условие

$180^0 - 2 \cdot \angle 2 = 50^0$
$2 \cdot \angle 2 = 180^0 - 50^0$
$2 \cdot \angle 2 = 130^0$
$\angle 2 = 130^0 : 2 = 65^0$
$\angle 1 = 180^0 - 65^0 = 115^0$

Ответ: 115^0, 65^0

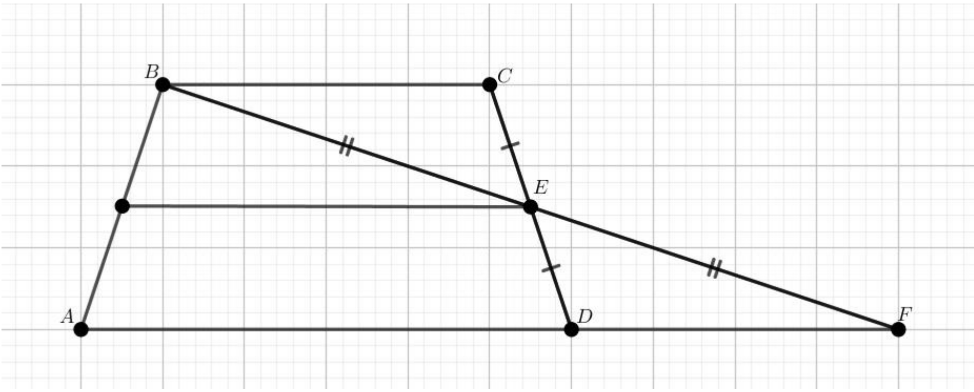
3. Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 210^0. Найдите эти углы. 105^0, 105^0

4. Угол ABC равен 70^0, а угол BCD равен 110^0. Могут ли прямые AB и CD быть:
а) параллельными; б) пересекающимися?

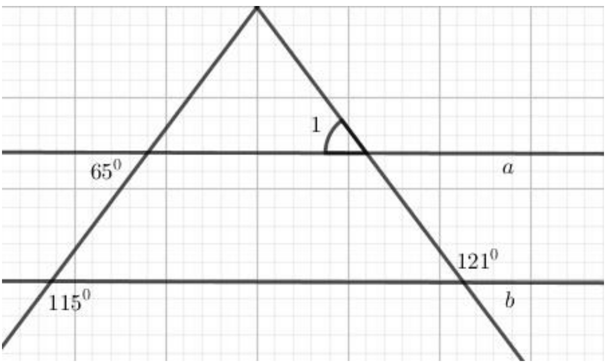
5. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых. a и b секущей c, если: а) один из углов равен 150^0; б) один из углов на 70^0 больше другого.

6. Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.

7. На рисунке $CE = ED,\ BE = EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE = BC$.



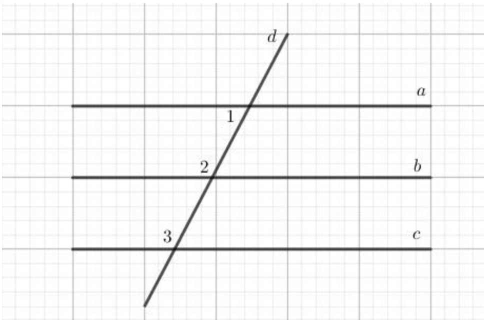
8. По данным рисунка найдите $\angle 1$



$\angle 1 = 59^0$

9. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой этих отрезков. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

10. На рисунке прямые a, b и c пересечены прямой d, $\angle 1 = 42^0$; $\angle 2 = 140^0$; $\angle 3 = 138^0$ Какие из прямых a, b и c параллельны.



$a \parallel c$

4. Соотношения между сторонами и углами треугольника

4.1 Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180^0 (Рис. 4.1.1):

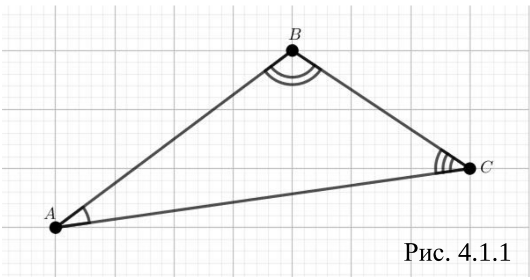


Рис. 4.1.1

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$$

Внешний угол треугольника

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

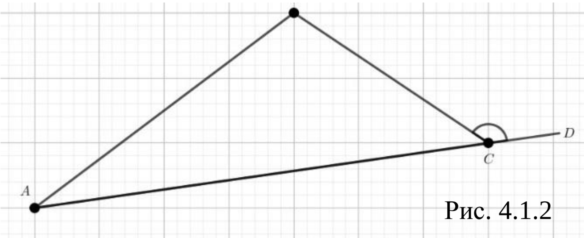
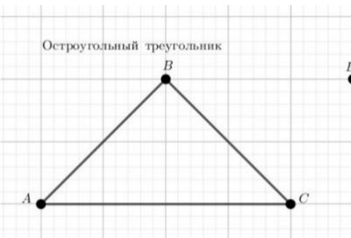


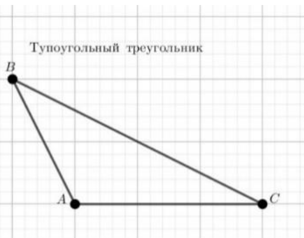
Рис. 4.1.2

$$\angle BCD=\angle A+\angle B$$

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (Рис. 4.1.2):

4.2 Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники.





$\angle A<90^0$
$\angle B<90^0$
$\angle C<90^0$

$\angle A>90^0$
$\angle B<90^0$
$\angle C<90^0$

$\angle C=90^0$
$\angle A<90^0$
$\angle B<90^0$

Соотношения между сторонами и углами треугольника

В треугольнике 1) против большей стороны лежит большой угол;

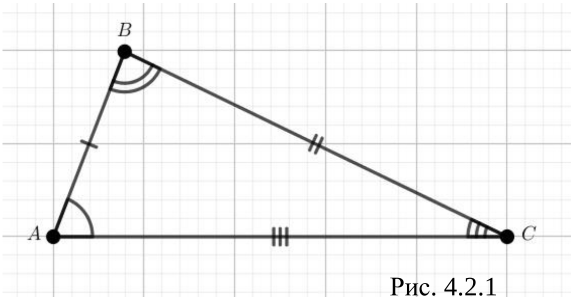


Рис. 4.2.1

2) Обратно, против большего угла лежит большая сторона (Рис. 4.2.1):

1) Если $AB < BC < AC,$ то $\angle C < \angle A < \angle B;$

2) Если $\angle C < \angle A < \angle B$, то $AB < BC < AC.$

4.3 Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других (Рис. 4.3.1):

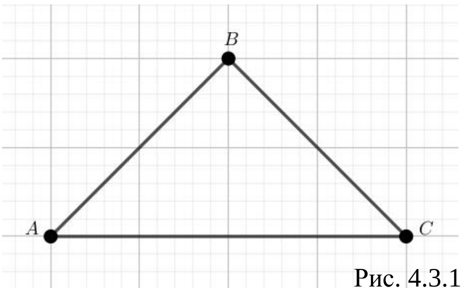


Рис. 4.3.1

$$AB < BC + AC$$
$$BC < AB + AC$$
$$AC < AB + BC$$

5. Прямоугольные треугольники

Некоторые свойства прямоугольных треугольников.

1. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0 (Рис. 5.1):

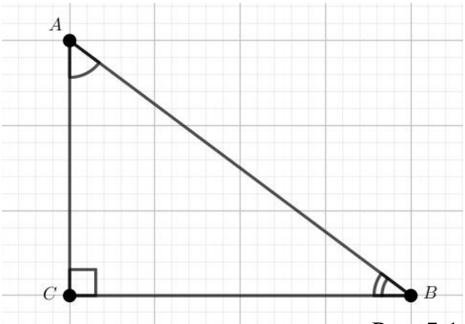


Рис. 5.1

$$\angle A + \angle B = 90^0$$

2. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30^0, равен половине гипотенузы (Рис.5.2):

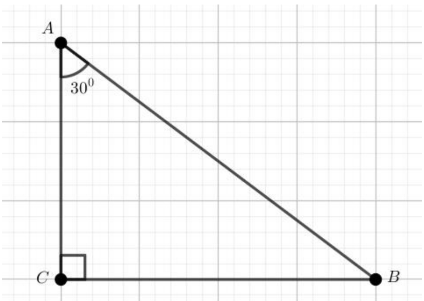


Рис. 5.2

$$CB = \frac{1}{2} AB$$

3. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30^0.

5.1 Признаки равенства прямоугольных треугольников

Первый признак.

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (Рис. 5.1.1):

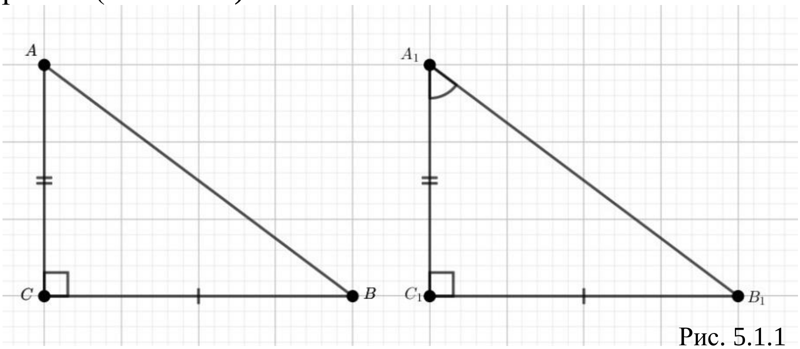


Рис. 5.1.1

$$\left.\begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ CB = C_1B_1 \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Второй признак.

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (Рис. 5.1.2):

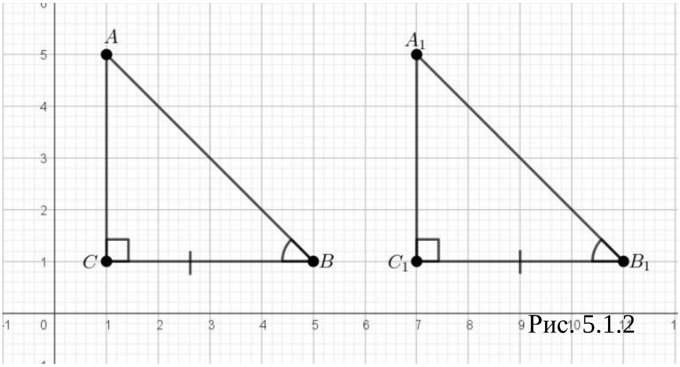


Рис. 5.1.2

$$\left.\begin{aligned} CB &= C_1B_1 \\ \angle B &= \angle B_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Третий признак.

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (Рис. 5.1.3):

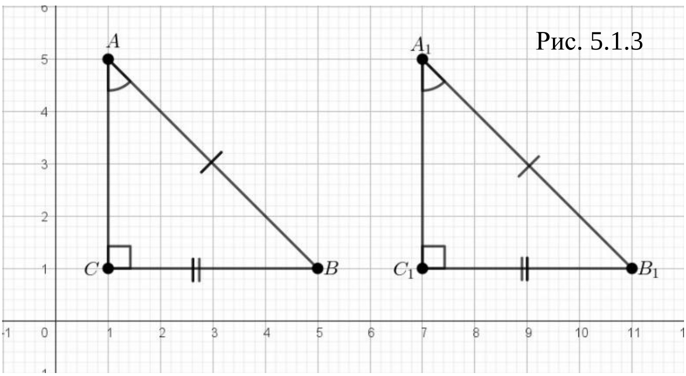


Рис. 5.1.3

Четвертый признак.

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (Рис. 5.1.4):

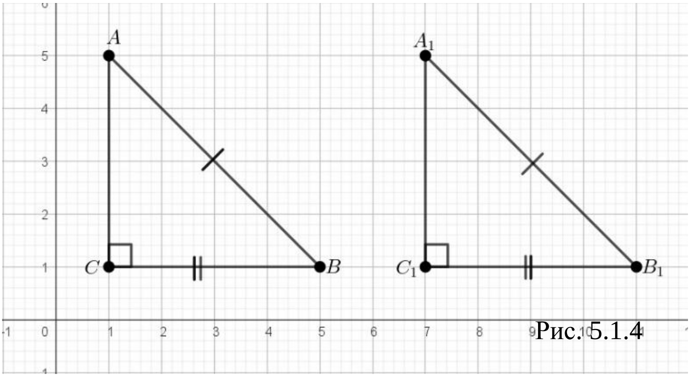


Рис. 5.1.4

$$\left.\begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ CB = C_1B_1 \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

Упражнения

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50^0$.

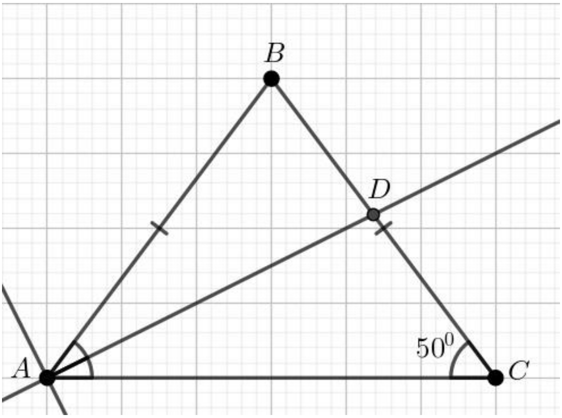
Дано:

$\triangle ABC,\ AB = BC$

AD - биссектриса

$\angle C = 50^0$

Найти $\angle ADC$.



Решение

Так как $\triangle ABC$ равнобедренный треугольник, то $\angle A = \angle C = 50^0$. Так как AD - биссектриса угла A и $\angle A = 50^0$, то $\angle BAD = \angle DAC = 50^0 : 2 = 25^0$.

$\angle DAC + \angle ADC + \angle C = 180^0$

$\angle ADC = 180^0 - \left(50^0 + 25^0\right) = 180^0 - 75^0 = 105^0$

Ответ: $\angle ADC = 105^0$

2. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

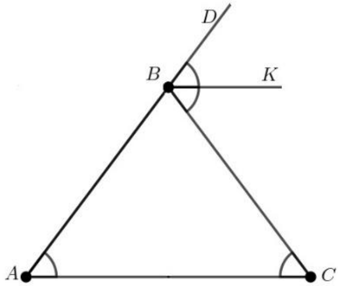
Дано:

$\triangle ABC,\ AB = BC$

$\angle DBC$ - внешний угол

$\angle DBK = \angle KBC$

Доказать, что $BK \parallel AC$



Докозательство

Так как $AB = BC$ ($\triangle ABC$ - равнобедренный), то $\angle A = \angle C$.

Так как $\angle DBC$- внешний угол, то

$$\angle DBC = \angle A + \angle C \Rightarrow \angle A = \angle C = \frac{\angle DBC}{2}$$

$$\angle DBK = \angle KBC = \frac{\angle DBC}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle KBC = \angle C$$

$$\Downarrow$$

$BK \parallel AC,$ так как $\angle KBC$ и $\angle C$ накрест лежащие углы.

3. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle A : \angle B : \angle C = 2:3:4$.
$\angle A = 40^0; \angle B = 60^0; \angle C = 80^0$

4. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 115^0. Найдите углы треугольника.

5. Найдите угол C треугольника ABC, если $\angle A = \alpha,\ \angle B = 2\alpha$.
$180^0 - 3\alpha$

6. Найдите углы равнобедренного треугольника, если а) угол при основании в два раза больше угла, противолежащего основанию;

б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC – равнобедренный.

8. Периметр равнобедренного треугольника равен $25 см$, разность двух сторон равна $4 см$, а один из его внешних углов – острый. Найдите стороны треугольника.

9. Расстояние между параллельными прямыми a и b равно $3 см$, а между параллельными прямыми a и c равно $5 см$. Найдите расстояние между прямыми b и c.

10. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, сумма длин которых равна $17 см$, а разность длин равна $1 см$. Найдите расстояние от точки до прямой.

11. В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE проведена высота CF. Найдите $\angle ECF$, если $\angle D = 54^0$.

12. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине A равен 120^0, $AC + AB = 18 см$. Найдите AC и AB.

13. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 54^0$, $\angle B = 67^0$.

14. В треугольнике ABC и $A_1B_1C_1$ углы A *и* A_1 – прямые, BD и B_1D_1 – биссектрисы. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle B = \angle B_1$ и $BD = B_1D_1$.

15. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 – высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

<u>Дополнительные задачи</u>

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N – середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

2. Три точки K, L, M лежат на одной прямой, $KL = 6см$, $LM = 10см$. Каким может быть расстояние км? Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

3. Отрезок AB длины а разделен точками P и Q на три отрезка AP, PQ и QB так, что $AP = 2PQ = 2QB$. Найдите расстояние между:

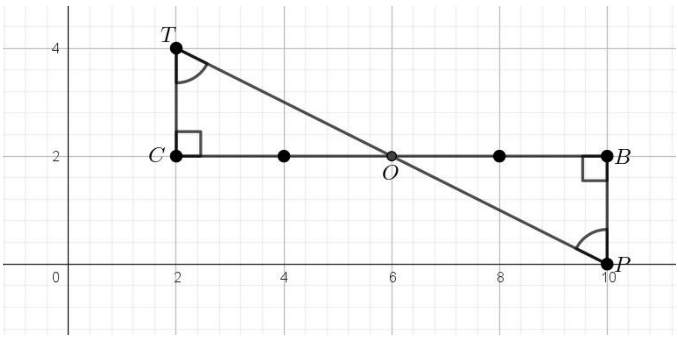
а) точкой A и серединой отрезка QB; $\frac{7}{8}a$

б) серединами отрезков AP и QB. $\frac{5}{8}a$

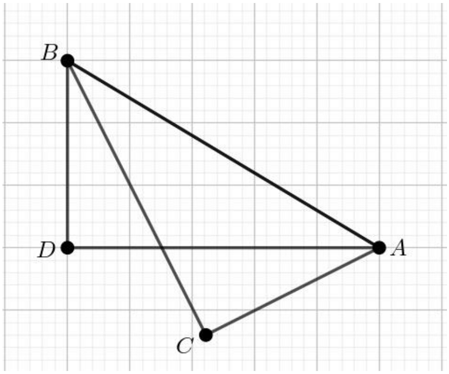
4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Найти ее длину, если периметр треугольника ABC равен $50м$, а треугольника ABD – $40м$.

5. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E на отрезке AD, причем $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

6. На рисунке $OC = OB$, $\angle C = \angle B = 90^0$. Докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

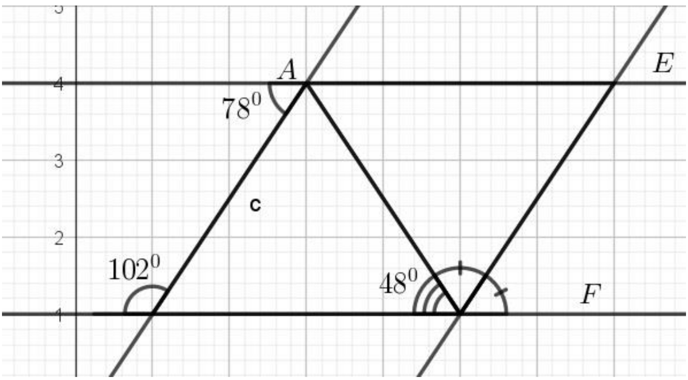


7. На рисунке $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13см$. Найдите DB.

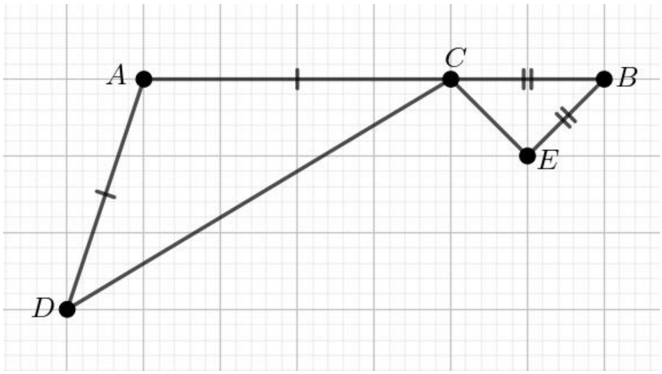


8. Отрезки AC и BD пересекаются в середине O отрезка AC. $\angle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$.

9. По данным рисунка найдите углы треугольника. DE – биссектриса угла ADF.



10. На рисунке $AD \| BE,$ $AC = AD$ и $BC = BE$. Докажите, что угол DCE – прямой.

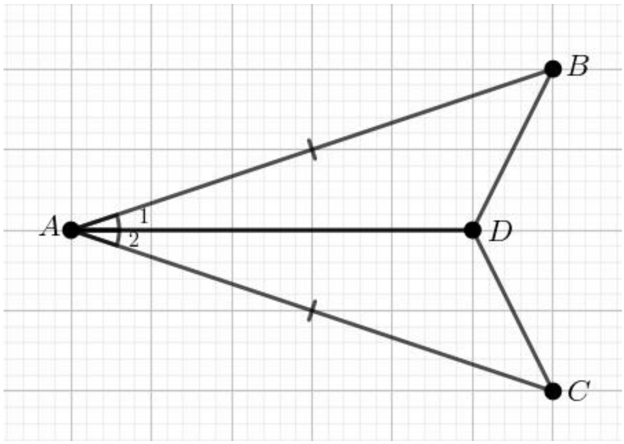


11. В равнобедренном треугольнике DEK с основанием DK отрезок EF – биссектриса, $DK = 16см$, $\angle DEF = 43^0$. Найдите KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

12. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 105^0$. $70^0; 70^0; 40^0$

13. Прямая AB параллельна прямой CD. Найдите расстояние между этими прямыми, если $\angle ADC = 30^0$, $AD = 6см$.

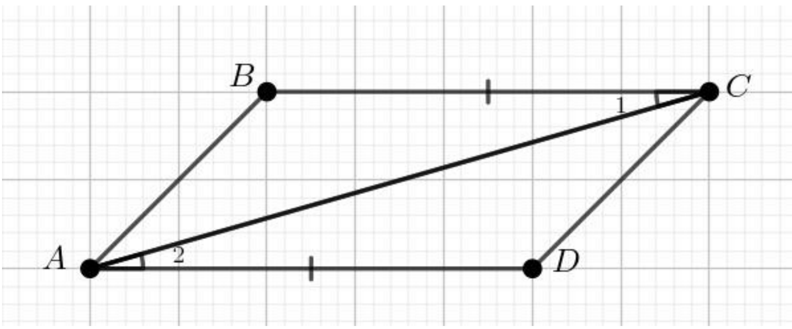
14. На рисунке $AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$, $\angle ADC = 120^0$ и $\angle ACD = 42^0$.



а) Докажите равенство треугольников ABD и ACD;

б) Найдите $\angle ABD$ и $\angle ADC$.

15. На рисунке $BC = AD$ и $\angle 1 = \angle 2$, $\angle ABC = 108^0$ и $\angle BAC = 32^0$.



а) Докажите равенство треугольников ABC и ACD;

б) Найдите $\angle ACD$ и $\angle ADC$.

$\angle ADC = 108^0; \angle ACD = 32^0$

Тесты для самопроверки

А) 1. Периметр треугольника равен $48 см$, а одна из сторон равна $18 см$. Найдите две другие стороны, если их разность равна $4,6 см$.

2. Медиана AD треугольника ABC продолжена за сторону BC на отрезок DE, равный AD, и точка E соединена с точкой C.

   а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$;

   б) найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56^0$, $\angle ABD = 40^0$.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Через точку D проведена прямая стороне AB и пересекающая стороны AC в точке F. Найдите углы треугольника ADF, если $\angle BAC = 72^0$.

4. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 60^0, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна $42 см$. Найдите гипотенузу треугольника.

Б) 1. Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен $74 см$, а одна из сторон равна $16 см$. Найдите две другие стороны треугольника.

2. Точки M и N лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры MP и NQ к прямой равны.

   а) Докажите, что $\triangle MPQ = \triangle PNQ$;равностороннем треугольнике ABC проведена

   б) найдите угол MNP, если $\angle MQP = 53^0$.

3. Сумма гипотенузы CE и катета CD прямоугольного треугольника CDE равна $31 см$, а их разность равна $3 см$. Найдите расстояние от вершины C до прямой DE.
4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, равным $37 см$, внешний угол при вершине B равен 60^0. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

В) 1**.** Периметр равнобедренного треугольника равен $25 см$, разность двух сторон равна $4 см$, а один из его внешних углов – острый. Найдите стороны треугольника.

2. Отрезки MN и PQ пересекаются в середине O отрезка MN, $\angle OMQ = ONP$.

а) Докажите, что $\triangle PNO = \triangle QMO$;

б) найдите NP и PO, если $PQ = 30 см$, $MQ = 20 см$. $NP = 20 см,\ PO = 15 см$

3. В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Расстояние от точки D до прямой AC равно $6 см$. Найдите расстояние от вершины A до прямой BC.
4. В прямоугольном треугольнике DCE (угол C -прямой) проведена EF биссектриса. Найдите расстояние от точки F до прямой DE, если $FC = 13 см$.

Г) 1**.** Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 58^0$, $\angle B = 96^0$.

2. В равностороннем треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD, на сторонах AB и CB отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = CF$.

   а) Докажите, что $\triangle ADE = \triangle CDF$.

   б) найдите $\angle ABD$, если $\angle A = 55^0$.

3. В треугольнике CDE проведена DM биссектриса. Через точку M проведена прямая параллельная стороне CD и пересекающая сторону DE в точке N. Найдите углы треугольника DMN, если $\angle CDE = 68^0$.

4. В прямоугольном треугольнике MNP с прямым углом M внешний угол при вершине N равен 120^0, $MN + NP = 24$ см. Найдите MN и NP.

6. Многоугольники

6.1 Ломанная

Ломанной называется фигура, которая состоит из точек и соединяющих их отрезков. Точки называются вершинами ломанной, а отрезки – звеньями ломанной.

Виды ломанных (Рис.6.1.1):

Замкнутая Незамкнутая

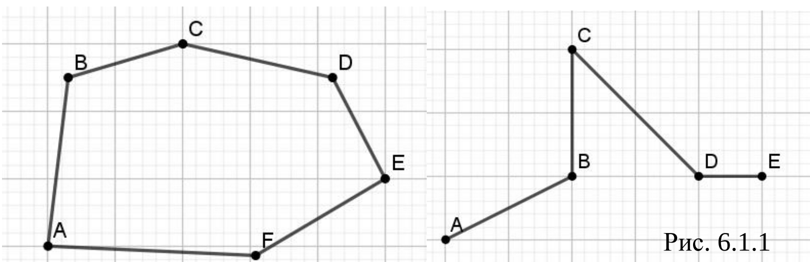


Рис. 6.1.1

Ломанная замкнута, если ее концы совпадают	Ломанная не замкнута, если ее концы не совпадают

6.2 Многоугольник

Многоугольник – это простая ломанная линия и конечная часть плоскости, которую она ограничивает._ Вершины ломанной называются вершинами многоугольника, а ее звенья – сторонами многоугольника. Отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие на одной стороне, называется диагональю многоугольника (Рис. 6.2.1):

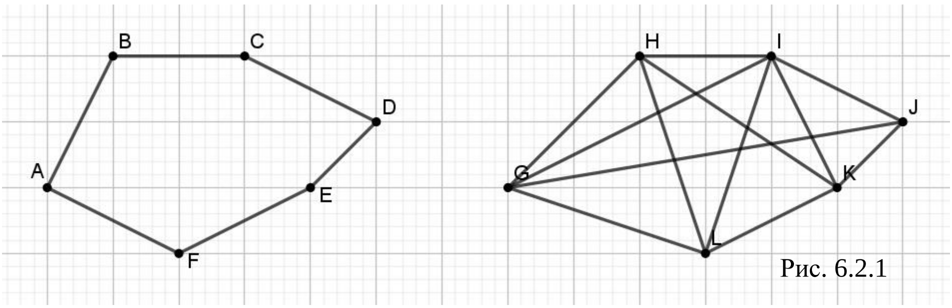


Рис. 6.2.1

6.2.1 Выпуклый многоугольник. Свойства выпуклых многоугольников

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Сумма углов выпуклого n-угольника равна определяется следующей формулой:

$$\left(n-2\right)\cdot 180^{0}.$$

Примеры выпуклых многоугольников (Рис. 6.2.1.1):

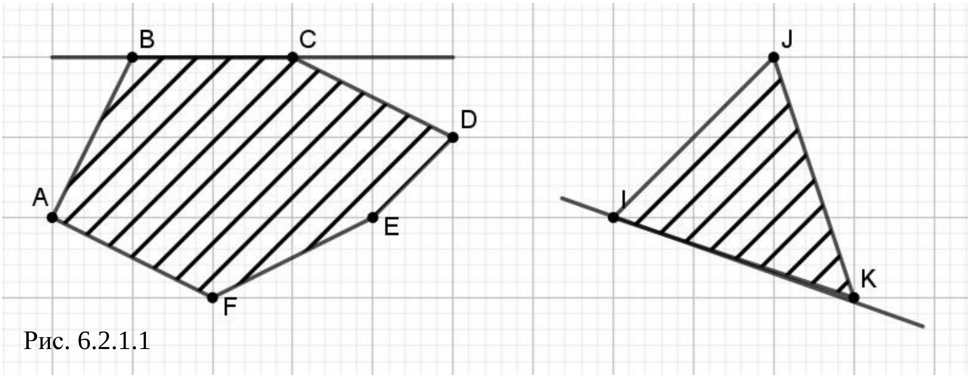


Рис. 6.2.1.1

Четырехугольники

Сумма углов выпуклого четырехугольника составляет 360^0.

Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (Рис.6.2.1.2):

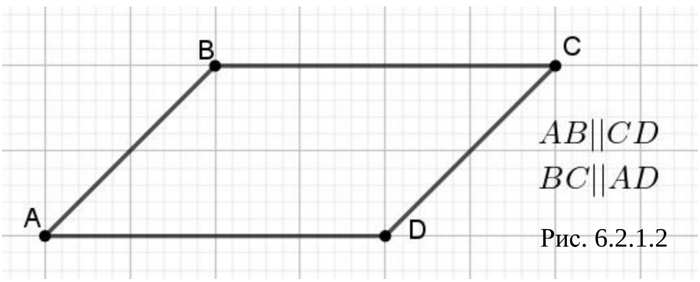


Рис. 6.2.1.2

Свойства параллелограмма

Свойство 1: В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны (Рис.6.2.1.3):

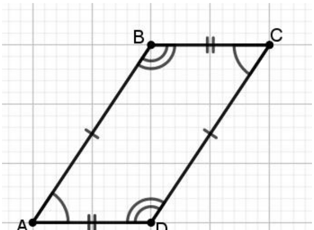


Рис. 6.2.1.3

$$AB = CD$$
$$BD = AD$$
$$\angle A = \angle C, \quad \angle B = \angle D.$$

Свойство 2: Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам (Рис. 6.2.1.4):

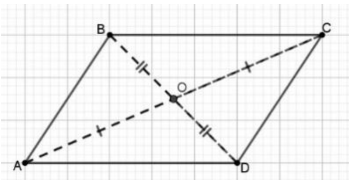


Рис. 6.2.1.4

$$AO = OC$$
$$BO = OD$$

Признаки параллелограмма

Признак 1: Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм (Рис. 6.2.1.5):

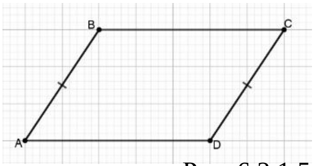


Рис. 6.2.1.5

$$AB = CD$$
$$AB \parallel CD$$

Признак 2: Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм (Рис. 6.2.1.6):

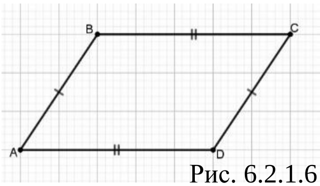


Рис. 6.2.1.6

$$AB = CD$$
$$AD = BC$$

Признак 3: Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм (Рис. 6.2.1.7):

$$AO = OC$$
$$BO = OD$$

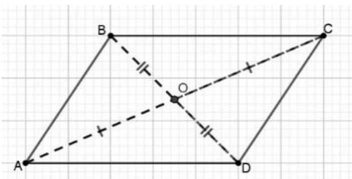


Рис. 6.2.1.7

Трапеция

Трапецией называется выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны (Рис. 6.2.1.8):

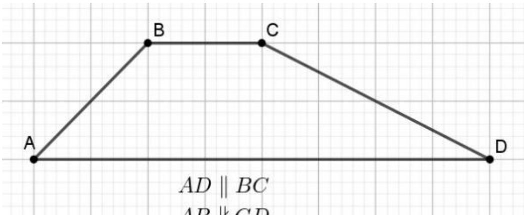


Рис. 6.2.1.8

Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны (Рис. 6.2.1.9):

$$AB = CD$$

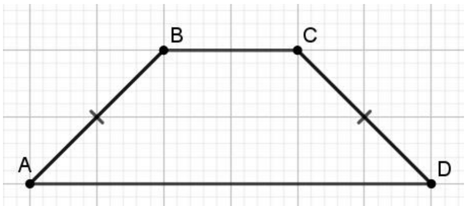


Рис. 6.2.1.9

Трапеция, один из углов которой прямой, называется прямоугольной (Рис. 6.2.1.10):

$$\angle A = 90^0$$
$$\angle B = 90^0$$

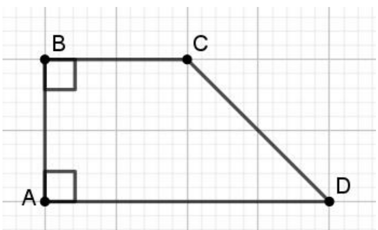
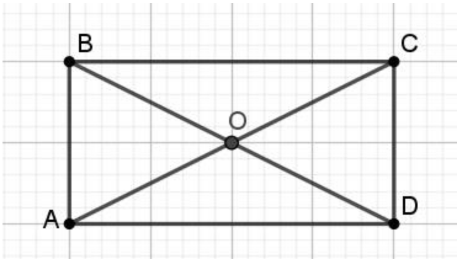


Рис. 6.2.1.10

Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойства прямоугольника

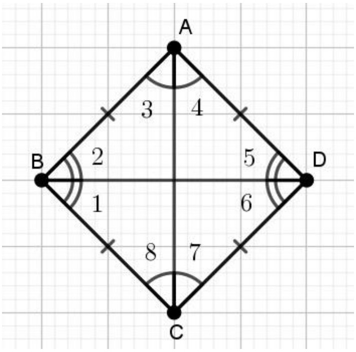


1	$AB = CD$ $BC = AD$
2	$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$
3	$AO = OC$ $BO = OD$
4	$AC = BD$

Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба



$AB = BC = CD = AD$

$AO = OC, \quad BO = OD$

$\angle A = \angle C, \quad \angle B = \angle D$

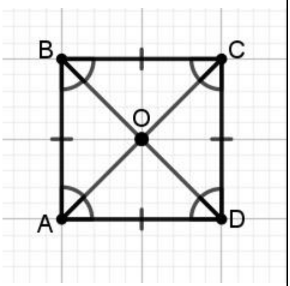
$AC \perp BD$

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = \angle 6$

$\angle 3 = \angle 4 = \angle 7 = \angle 8$

Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Свойства квадрата	
	$AB = BC = CD = AD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$ $AC = BD$ $AC \perp BD$ $AO = OC, \quad BO = OD$ $\angle OBA = \angle BAO = \angle OAD \ldots = \angle CBO = 45°$

7. Теорема Фалеса

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки (Рис. 7.1):

Обобщенная теорема Фалеса

Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки (Рис. 7.2):

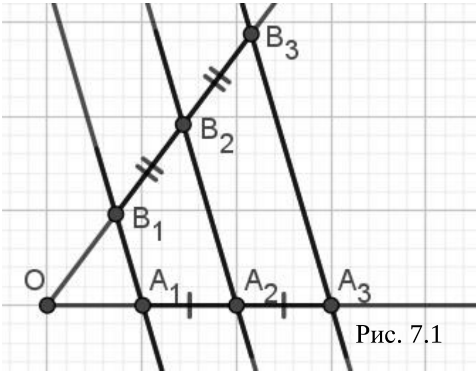


Рис. 7.1

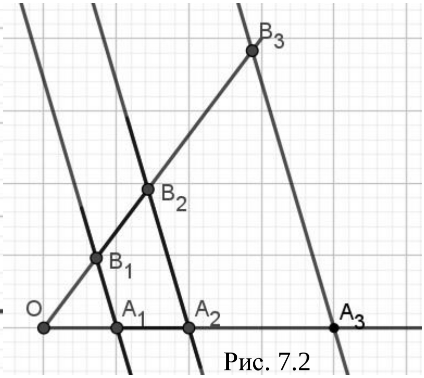


Рис. 7.2

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3;\ A_1A_2 = A_2A_3 \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3$$

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \Rightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_1} = \frac{A_1A_3}{B_1B_2}$$

Осевая и центральная симметрии

Осевая симметрия

Две точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой a, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (Рис. 7.3):

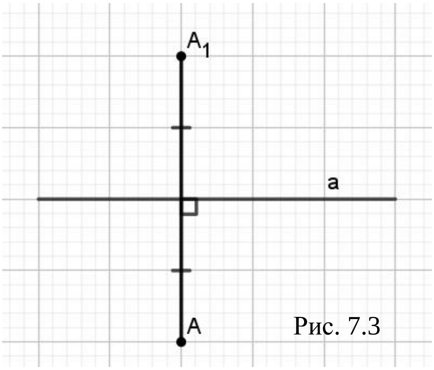


Рис. 7.3

Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

Фигура называется симметричной относительно прямой a, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой а также принадлежит этой фигуре.

Прямая a называется осью симметрии фигуры.

Приведем примеры фигур; обладающие осевой симметрией (Рис. 7.4):

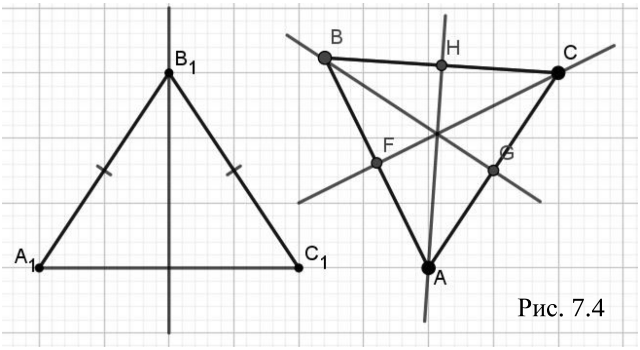
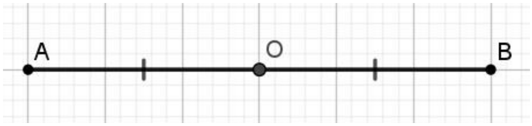


Рис. 7.4

Центральная симметрия

Две точки A и B называются симметричным относительно точки O, если O – середина отрезка AB.

Точка O считается симметрично самой себе.



Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре.

Фигуры, обладающие центральной симметрией (Рис. 7.5):

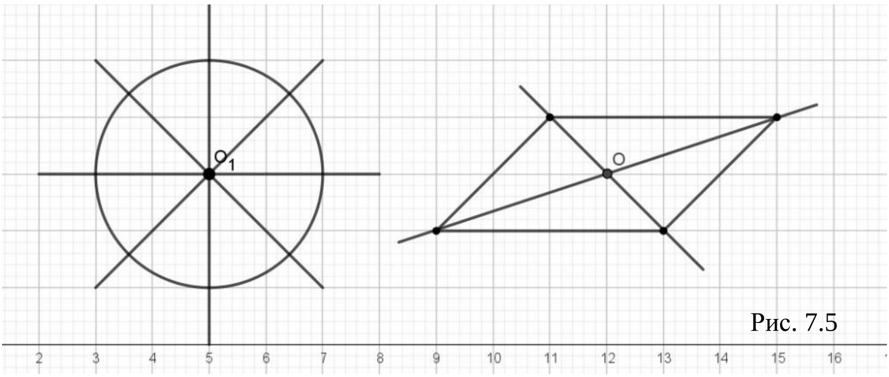


Рис. 7.5

Упражнения

1. Найдите сумму углов выпуклого:

а) пятиугольника;

Для решения применим формулу $(n-2)\cdot 180^0$ при $n=5$. Ответ: $540°$.

б) шестиугольника; в) десятиугольника.

2. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен:

а) 90^0 б) 60^0 в) 120^0 г) 108^0

Для решения применим формулу $\alpha_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$, где $\alpha = 90°$.

Ответ: $n = 4$

3. Найдите углы правильного n-угольника, если:

а) n=3; б) n=5; в) n=6; г) n=10; д) n=18.

4. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен:

а) 60^0; б) 90^0; в) 135^0; г) 150^0.

5. Найдите площадь S правильного n -угольника, если

а) n=4; $R = 3\sqrt{2}$ $см$;

б) n=3; $P = 24$ $см$;

в) n=6; $r = 9$ $см$.

6. Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48см.

7. Заполните таблицу

N	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

a_4 – сторона квадрата;

P – периметр квадрата;

R – радиус описанной окружности;

r – радиус вписанной окружности;

S – площадь квадрата.

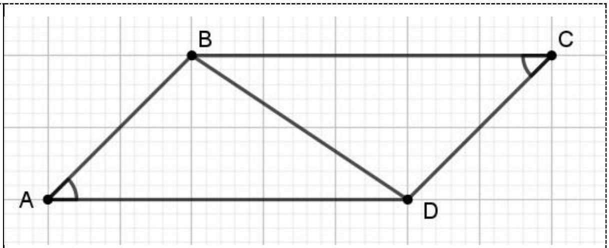
8. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 8см,одна сторона больше каждой из других соответственно на 3мм, 4мм и 5мм.

9. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 66см, первая сторона больше второй на 8см и на столько же меньше третьей стороны, а четвертая – в три раза больше второй.

10. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если

а) $AB \parallel CD, \ \angle A = \angle C$;

б) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$.

<table>
<tr><td>а)
$AB \parallel CD,\ \ \angle A = \angle C$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Докажем, что $ABCD$ - параллелограмм</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Доказательство</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\angle ADB = \angle CBD$ как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$. Следовательно, все углы в треугольниках $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ равны. Следовательно, треугольники $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ равны по второму признаку равенства треугольников: сторона BD общая и углы при ней равны. Следовательно, $AB = CD, AD = BC$. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.</td></tr>
</table>

11. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр этого параллелограмма, если $BK = 15 см, KC = 9 см$.

12. В параллелограмме $MNPQ$ проведен перпендикуляр NH к прямой MQ, причем точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH = 3 см, HQ = 5 см$, $\angle MNH = 30^0$.

13. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD – параллелограмм.

14. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOB, если $\angle CAD = 30^0$, $AC = 12$ см.

15. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle B = 60^0$, $AC = 10,5$ см.

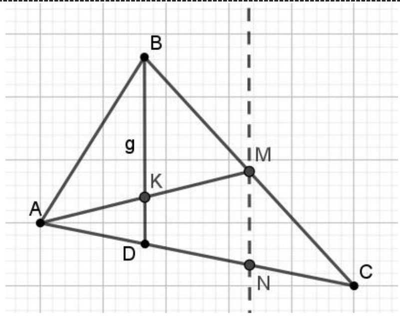
16. Диагонали прямоугольника $MPKH$ пересекаются в точке O. Отрезок OA является высотой треугольника MOP, $\angle AOP = 15^0$. Найдите $\angle OHK$.

17. Диагонали ромба пересекаются в точке O. Найдите диагональ BD, если сторона BC равна 10см, а $\angle B = 120^0$.

18. Точка K – середина медианы AM треугольника ABC. Прямая BK пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AD = \frac{1}{3}AC$.

AM - медиана,

$AK = KM$



Докажем, что

$$AD = \frac{1}{3}AC$$

Доказательство

Проведем $MN \parallel BD$. По теореме Фалеса $AD = DN$, так как $AK = KM$ и $MN \parallel BD$. По теореме Фалеса $DN = NC$, так как $BM = MC$ и $MN \parallel BD$. Следовательно, $AD = DN = NC \Rightarrow$

$$AD = \frac{1}{3}AC.$$

19. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM = AB$. Через точку M проведена прямая перпендикулярная к прямой AC и пересекающая BC в точке H. Докажите, что $BH = HM = MC$.

20. В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите AD, если периметр трапеции равен 20см, а $\angle D = 60^0$.

21. Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч?

22. Какие из следующих букв имеют центр симметрии $A; O; M; X, K$?

23. Сколько центров симметрии имеет пара параллельных прямых?

8. Площадь

8.1 Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту: $S = \frac{1}{2}ah$ (Рис. 8.1.1):

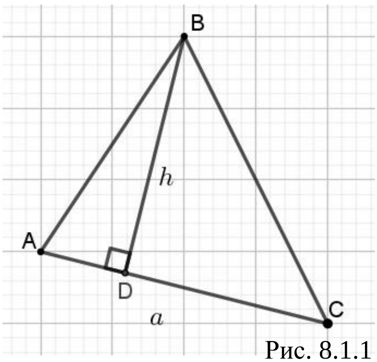


Рис. 8.1.1

Для определения площади треугольника также используются следующие формулы:

- Формула Герона (удобно использовать, когда известны длины всех сторон:

- $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$

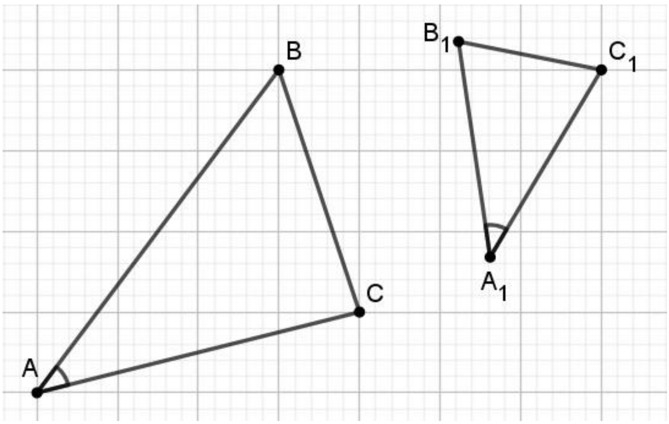
   (α - угол между

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

сторонами AB и AC)

где p - полупериметр.

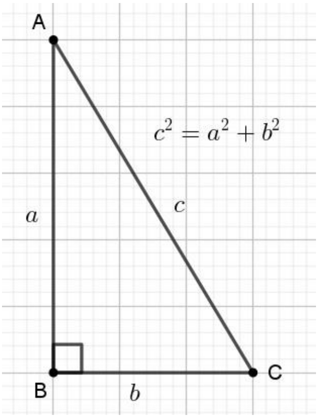
Теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу



$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$$

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



8.2 Площадь четырехугольника

<u>Площадь квадрата</u>

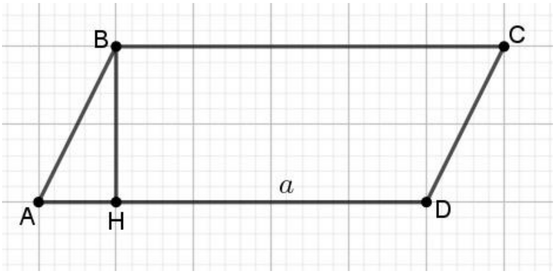
Площадь квадрата со стороной *a* равна произведению двух его сторон: $S = a^2$

<u>Площадь прямоугольника</u>

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон $S = a \cdot b$

<u>Площадь параллелограмма</u>

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту: $S = a \cdot h$

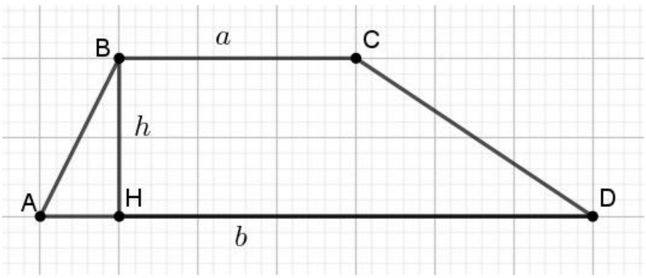


Площадь ромба

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Площадь трапеции:

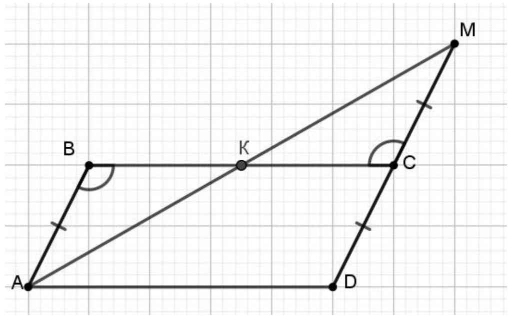
Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту: $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$



Упражнения

1. Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M, симметричную точке D относительно точки C. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

$ABCD$ - параллелограмм;
M симметрична D относительно C



Докажем, что
$S_{ABCD} = S_{AMD}$

Доказательство

$CM = CD$ так как точка M симметрична точке D относительно точки C.

$S_{ABCD} = S_{ABK} + S_{AKCD}$
$S_{AMD} = S_{KMC} + S_{AKCD}$

$\angle BAK = \angle KMC$ (вертикальные углы) $\Rightarrow \angle BAK = \angle KMC$ $\Rightarrow \triangle ABK = \triangle KMC$ по II признаку равенства треугольников. Следовательно $S_{ABCD} = S_{AMD}$

2. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причем точка M – середина отрезка AE. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

3. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 8м и 18м.

4. Найдите стороны прямоугольника, если а) его площадь равна 250см^2, а одна сторона в 2,5 раза больше другой; б) его площадь равна 9м^2, а периметр равен 12м.

5. Как изменится площадь прямоугольника, если а) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза; б) каждую сторону увеличить в два раза; в) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза, а другую уменьшить в два раза?

6. Пусть a и b – смежные стороны параллелограмма, а h_1 и h_2 – его высоты. Найдите:

а) $h_2,\ если\ a=18см, b=30см, h_1=6см, h_2>h_1;$

б) $h_1,\ если\ a=10см, b=15см, h_2=6см, h_2>h_1;$

в) $h_1\ и\ h_2,\ если\ S=54см^2, a=4,5см, b=6см.$

7. Острый угол параллелограмма равен 30^0, а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 2см и 3см. Найдите площадь параллелограмма.

8. Пусть a – основание, h – высота, а S – площадь треугольника. Найдите:

а) $S,\ если\ a=7см, h=11см;$

б) $S,\ если\ a=2\sqrt{3}см, h=5см;$

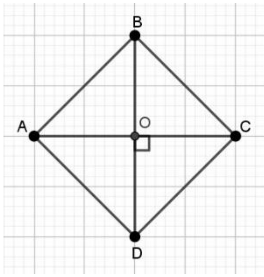
в) $h,\ если\ S=37,8см^2, a=14см;$

г) $a,\ если\ S=37,8см^2, h=3\sqrt{2}см.$

9. Две стороны треугольника равны 7,5см и 3,2см. Высота, проведенная к большей стороне равна 2,4см. Найдите высоту, проведенную к меньшей из данных сторон.

10. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

$ABCD$ - ромб;



Докажем, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

Доказательство

Так как $ABCD -$ ромб, то $AC \perp BD$.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO \ \ (BO - высота,\ т.к.\ AC \perp BD)$$

$$SACD = \frac{1}{2} AC \cdot OD \ \ (OD - высота)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot OD = \frac{1}{2} AC\left(BO + OD\right) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

11. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если:

а) $AB = 21см, CD = 17см,\ высота\ BH\ равна\ 21см;$

б) $\angle D = 30^0,\ AB = 2\,см,\ CD = 10\,см,\ DA = 8см;$

в) $BC \perp AB,\ AB = 5см,\ BC = 8см,\ CD = 13см.$

12. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6см, а больший угол равен 135^0.

13. Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135^0 а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки $1,4$ см и $3,4$ см. Найдите площадь трапеции.

14. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17см, а основание равно 16см. Найдите высоту, проведенную к основанию.

15. Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a –сторона треугольника.

16. Найдите боковую сторону и площадь равнобедренного треугольника, если:

а) основание равно 12см, а высота, проведенная к основанию равна 8см;

б) основание равно 18см, а угол, противолежащий основанию, равен 120^0;

в) треугольник прямоугольный и высота, проведенная к гипотенузе, равна 7 см.

17. По данным катетам a и b прямоугольного треугольника. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе:

а) $a=5,\ b=12;$

б) $a=12,\ b=16.$

Задача 18. Основание D высоты CD треугольника ABC лежит на стороне AB, причем $AD=BC$. Найдите AC, если $AB=3$, а $CD=\sqrt{3}$.

19. Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50см, а разность смежных сторон равна 1см.

20. Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 24 см^2, а точка пересечения диагоналей удалена от сторон на 2см и 3см.

21. Меньшая сторона параллелограмма равна 29см. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей к большой стороне, делит ее на отрезки, равные 33см и 12см. Найдите площадь параллелограмма.

22. Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

23. Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен 150^0. Найдите площадь ромба.

24. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведенная к стороне AB, равна 11 см. Найдите высоту, проведенную к стороне BC.

25. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если катеты равны:

а) 4 см и 11 см;

б) 1,2 дм и 3 дм.

26. Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27см^2.

27. Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.

28. Основание D высоты CD треугольника ABC лежит на стороне AB, причем $AD=BC$. Найдите AC, если $AB=3$, а $CD=\sqrt{3}$.

29. Высоты параллелограмма равны 5 см и 4 см, а периметр равен 42 см. Найдите площадь параллелограмма.

30. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если

а) ее меньшее основание равно 18 см, а высота – 9 см и острый угол равен 45^0;

б) ее основания равны 16 см и 30 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

31. Найдите площадь четырехугольника *ABCD*, если *AB*=5 см, *BC*=13 см, *DA*=15 см, *AC*=12 см.

32. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а сумма ее оснований равна 2a. Найдите площадь трапеции.

33. В равнобедренной трапеции *ABCD* с основаниями *AD*=17 см, *BC*=5 см и боковой стороной *AB*=10 см через вершину *B* проведена прямая, делящая диагональ *AC* пополам и пересекающая основание *AD* в точке *M*. Найдите площадь треугольника *BDM*.

9. Подобные треугольники

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника (Рис. 9.1):.

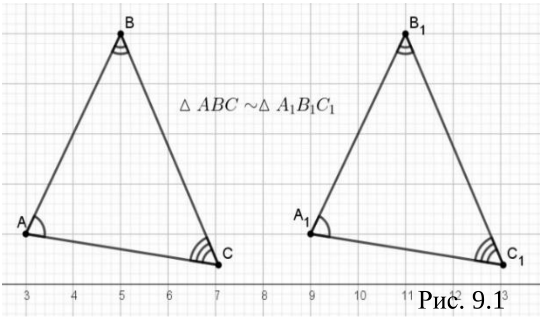


Рис. 9.1

$$\angle A = \angle A_1$$
$$\angle B = \angle B_1$$
$$\angle C = \angle C_1$$
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

9.1 Признаки подобия треугольников

I признак

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (Рис. 9.1.1):.

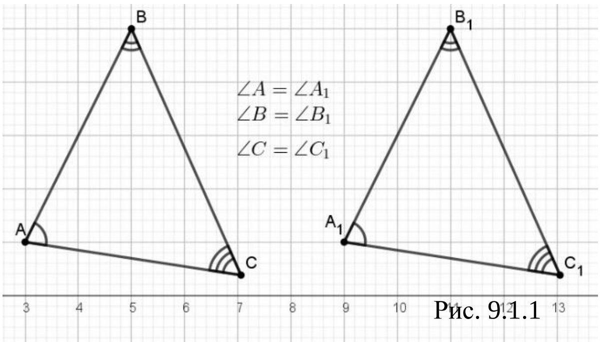


Рис. 9.1.1

II признак

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между ними этими сторонами равны, то такие треугольники подобны (Рис. 9.1.2)

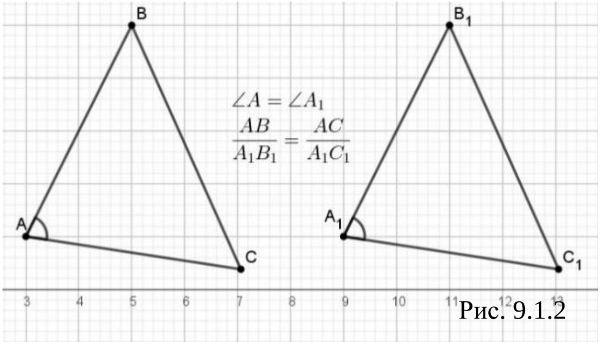


Рис. 9.1.2

III <u>признак</u>

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (Рис. 9.1.3)

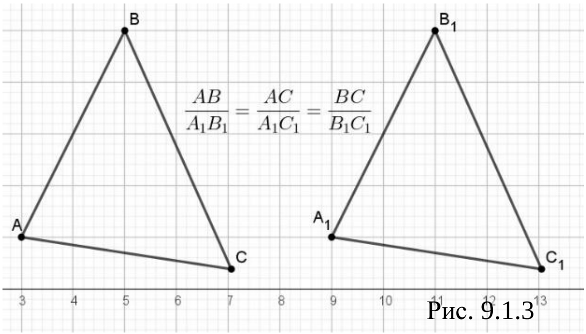


Рис. 9.1.3

<u>*Свойства подобных треугольников*</u>

1. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия: $\frac{S}{S_1} = k^2$

2. Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия: $\frac{P}{P_1} = k$
3. Отношение высот, проведенных к сходственным сторонам подобных треугольников равно коэффициенту подобия: $\frac{h}{h_1} = k$
4. Отношение биссектрис, проведенных к сходственным сторонам подобных треугольников равно коэффициенту подобия: $\frac{l}{l_1} = k$
5. Отношение медиан, проведенных к сходственным сторонам подобных треугольников равно коэффициенту подобия: $\frac{m}{m_1} = k$

9.2 Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Отрезок xy называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) между отрезками AB и CD, если $xy = \sqrt{AB \cdot CD}$

Свойства высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла

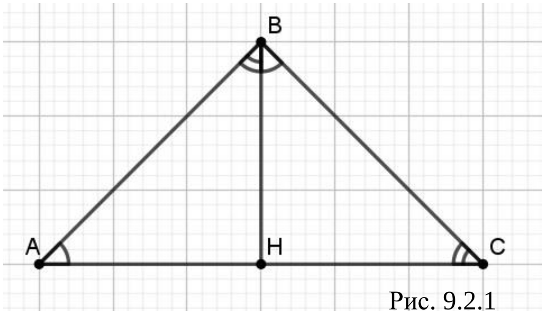


Рис. 9.2.1

Высота прямоугольного треугольника, проведенного из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику (Рис. 9.2.1):

$$\triangle ACH \sim \triangle CHB$$
$$\triangle ACH \sim \triangle ABC$$
$$\triangle CHB \sim \triangle ABC$$

Высота прямоугольного треугольника, проведенного из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.

$$CH = \sqrt{AH \cdot HB}$$

9.3 Средняя линия треугольника и трапеции

Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника – отрезок, который соединяет середины двух сторон. Средняя линия параллельна третьей стороне, а ее длина равна половине длины этой стороны (Рис. 9.3.1):.

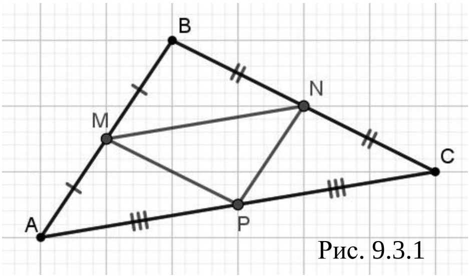


Рис. 9.3.1

$$MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2} AC$$

$$MP \parallel BC, \quad MP = \frac{1}{2} BC$$

$$NP \parallel AB, \quad NP = \frac{1}{2} AB$$

Средняя линия трапеции

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется средней линией трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме (Рис. 9.3.2):

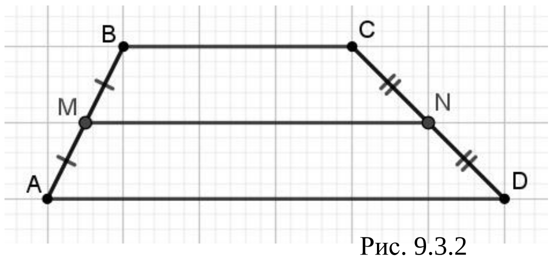
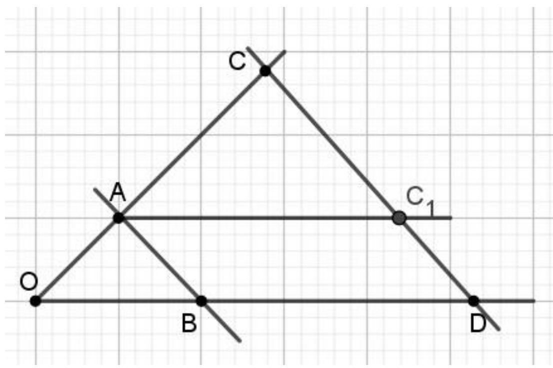


Рис. 9.3.2

$$MN \parallel BC \parallel AD$$
$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

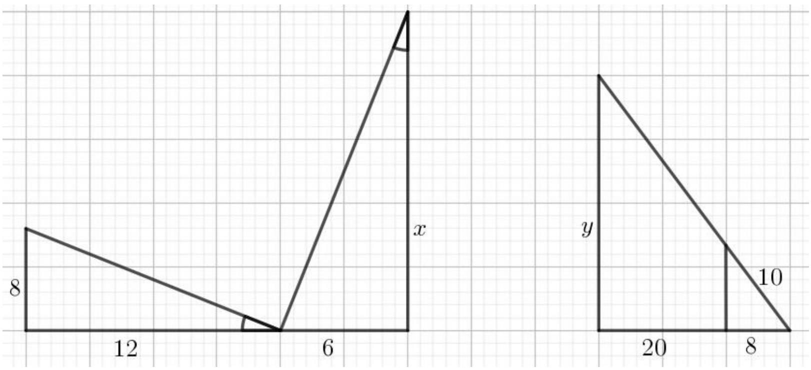
<u>Упражнения</u>

1. Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD.

$\angle O, \quad AB \parallel CD$	
Докажем, что $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AC}{BD}$	
Доказательство	

Проведем через точку A прямую AC_1, параллельную прямой BD. Тогда $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$ по первому признаку подобия треугольников. $\left(\angle O = \angle CAC_1, \quad \angle OAB = \angle C_1\right)$; следовательно, $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$. Так как $AC_1 = BD$ (AC_1DB - параллелограмм), то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, что и требовалось доказать.

2. Найти x и y.



3. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите:

а) EF *и* FC, *если* $DE = 8$*см*, $EC = 4$*см*, $BC = 7$*см*, $AE = 10$*см*;

б) DE *и* EC, *если* $AB = 8$*см*, $AD = 5$*см*, $CF = 2$*см*.

4. Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,5 см и 3,9 см продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояние от точки M до концов меньшего основания.

5. Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение AK, если:

а) M – середина отрезка AD;

б) $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{1}{2}$.

6. Дан треугольник, стороны которого равны 8см, 5см, 7см. Найдите периметр треугольника, вершины которого являются середины сторон данного треугольника.

7. Точка P и Q – середины сторон AB и AC треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника APQ равен 21см.

8. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

9. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3:4, а гипотенуза равна 50мм. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведенной из вершины прямого угла.

10. В треугольнике, стороны которого равны 5см, 12см и 13см, проведена высота к большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону.

11. Длина тени дерева равна 10,2см, а длина тени человека, рост которого 1,7м, равна 2,5м. Найдите высоту дерева.

10. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

10.1 Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (Рис. 10.1.1):.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin A = \frac{BC}{AB}$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$tgA = \frac{BC}{AC}$$

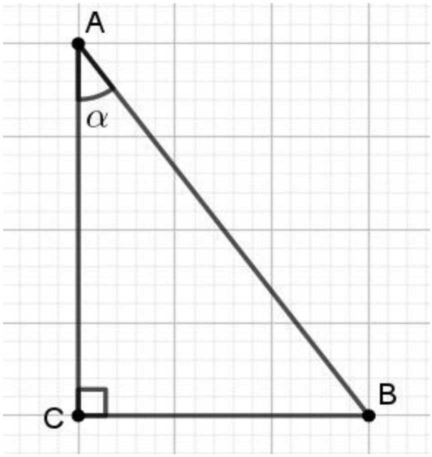


Рис.

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Значения синуса, косинуса и тангенса для углов $30°, 45°, 60°$:

α	30^0	45^0	60^0
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Упражнения

1. Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C, если

а) $BC = 8, AB = 17;$ б) $BC = 21, AC = 20;$

в) $BC = 1, AC = 2;$ г) $AC = 24, AB = 25.$

2. В прямоугольном треугольнике катеты равны a и b. Выразите через a и b гипотенузу и острые углы треугольника и найдите их значения при $a = 12, b = 15.$

$\sqrt{a^2 + b^2}, \, tg\alpha = \frac{a}{b}, \, tg\beta = \frac{b}{a};$

$\approx 19см, \approx 38^0 39'$

3. Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 2см и 6см, если угол при большем основании равен α.

$8tg\alpha \; см^2$

4. Найдите углы ромба, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и 2.

5. Стороны прямоугольника равны 3см и $\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

6. Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом α при основании, если:

а) боковая сторона равна b;

б) основание равно a.

11. Окружность.

Основные понятия и формулы

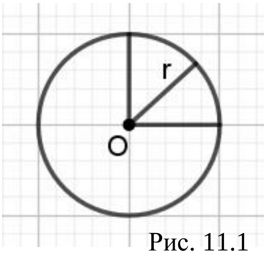


Рис. 11.1

Окружность – это геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки (центр окружности) (Рис. 11.1):.

Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности называется радиусом окружности r.

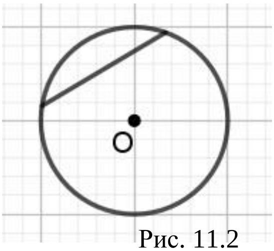


Рис. 11.2

Отрезок, соединяющий две любые точки окружности называется хордой (Рис. 11.2):.

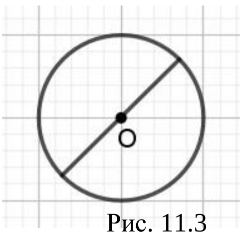


Рис. 11.3

Хорда, проходящая через центр окружности называется диаметром окружности d (Рис. 11.3):.

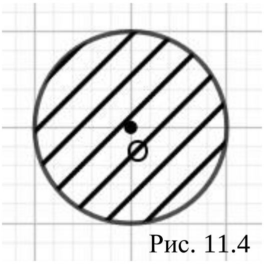


Рис. 11.4

Часть плоскости, ограниченная окружностью называется кругом (Рис. 11.4):.

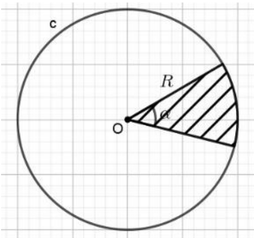


Рис. 11.5

Круговым сектором или просто сектором называется часть круга ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга (Рис. 11.5):

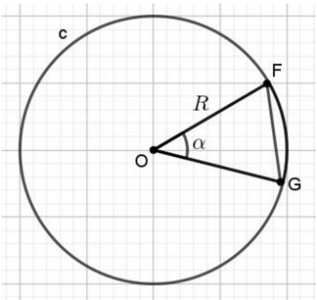


Рис. 11.6

Круговым сегментом называется часть круга ограниченная дугой и хордой, соединяющей концы этой дуги (Рис. 11.6):

Формулы:

Длина окружности	$c = 2\pi R$
Длина дуги	$l = \dfrac{\pi R}{180^0} \cdot \alpha$
Площадь круга	$S = \pi R^2$

Площадь кругового сектора $S = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot \alpha$

Площадь кругового сегмента $S_{сегм.} = S_{сек.} - S_{\triangle OFG}$

Касательная и окружность

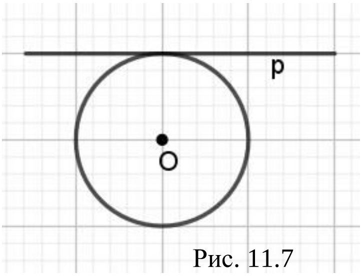


Рис. 11.7

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности (Рис. 11.7):.

<u>*Свойства касательной, секущей и хорды*</u>

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

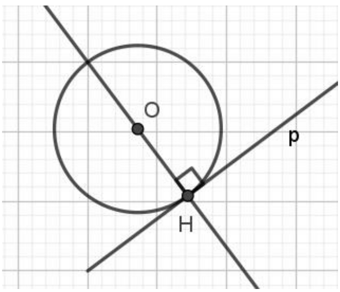


Рис. 11.8

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания: $OH \perp P$ (Рис. 11.8):.

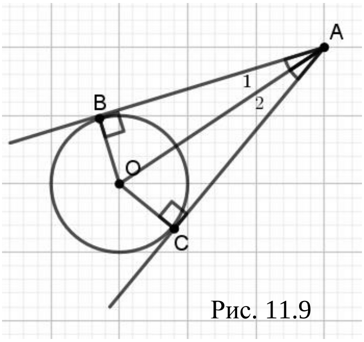


Рис. 11.9

Отрезки касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности $\begin{matrix} AB = AC \\ \angle 1 = \angle 2 \end{matrix}$ (Рис. 11.9):.

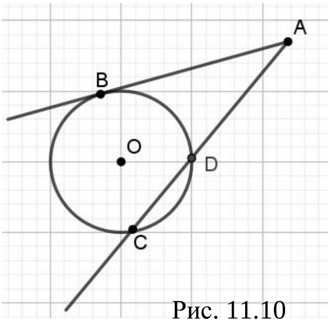


Рис. 11.10

Если к окружности проведены касательная и секущая, то произведение секущей и ее внешней части, равны квадрату касательной: $AB^2 = AC \cdot AD$ (Рис. 11.10):.

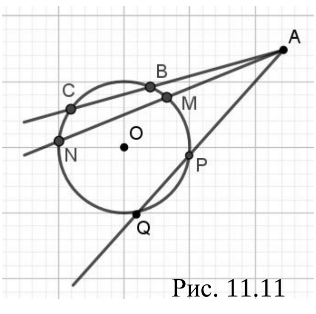


Рис. 11.11

Если к окружности проведены несколько секущих, то произведение каждой из секущих на внешнюю часть – постоянное число:

$AB \cdot AC = AN \cdot AM = AQ \cdot AP$

(Рис. 11.11):.

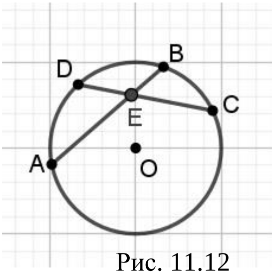


Рис. 11.12

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (Рис. 11.12):.

Центральные и вписанные углы

Дуга окружности (обозначается: $\smile$) — одна из двух частей окружности, на которые её разбивают две различные принадлежащие ей точки. Любые две различные точки A и B окружности разбивают её на две части; каждая из этих частей называется дугой (Рис. 11.3):.

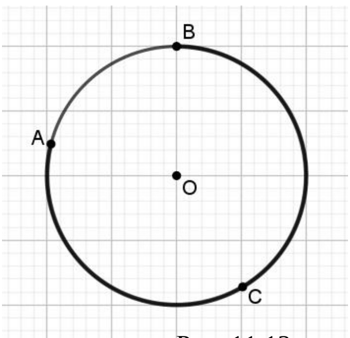


Рис. 11.13

Обозначения - $\smile ACB$ и $\smile AB$;

$$\smile ACB = 360^0 - \smile AB$$

Дугу окружности можно измерять в градусах.

Угол с вершиной в центре окружности называется центральным углом.

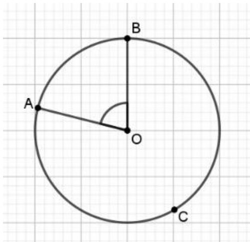


Рис. 11.14

Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается: $\angle AOB = \cup AB$ (Рис. 11.14):.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность называется вписанным углом.

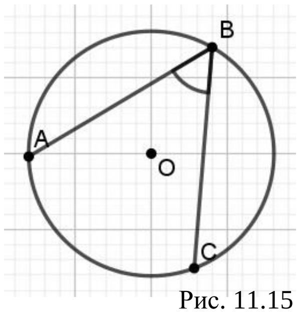


Рис. 11.15

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ (Рис. 11.15):.

<u>Следствия</u>

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны: $\angle ABC = \angle ADC = \angle AMC$ (Рис. 11.16):.
2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – прямой: $\angle ACB = \angle ADB = 90^0$ (Рис. 11.17):.

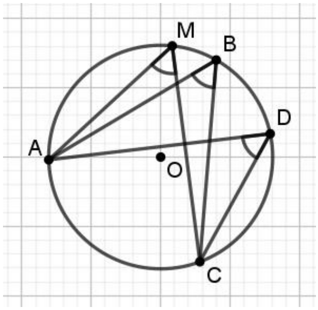


Рис. 11.16

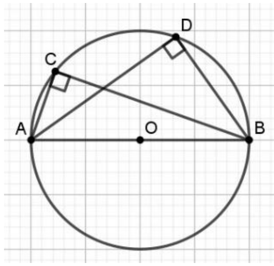


Рис. 11.16.7

11.1 Вписанные и описанные окружности

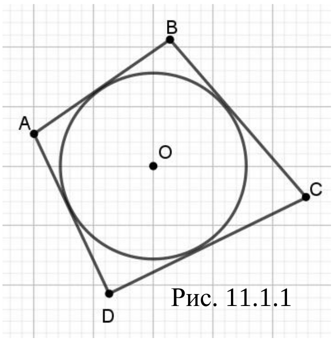


Рис. 11.1.1

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются окружности (Рис. 11.1.1):

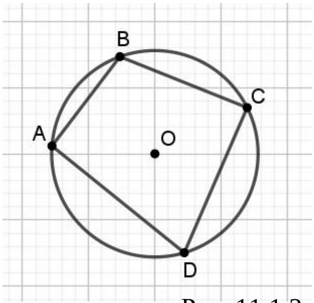


Рис. 11.1.2

Окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на окружности (Рис. 11.1.2):

В любой треугольник можно вписать окружность (Рис. 11.1.3):

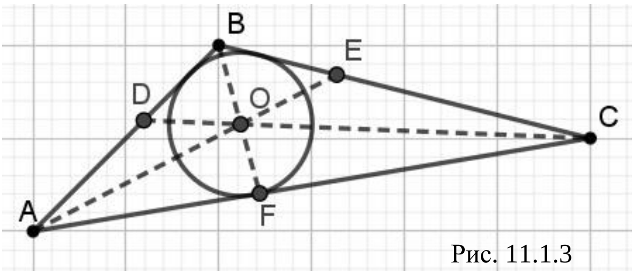


Рис. 11.1.3

Центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника и вычисляется по формуле: $r = \frac{S}{p}$, где

S - площадь треугольника, а p - полупериметр треугольника.

Около любого треугольника можно описать окружность (Рис. 11.1.4):

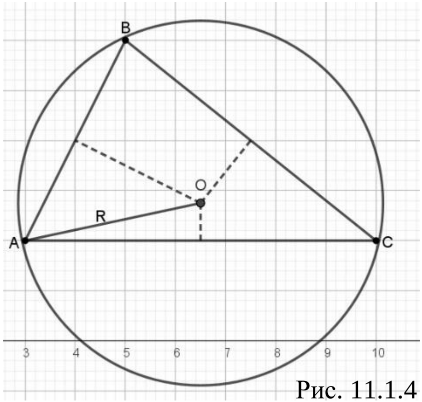


Рис. 11.1.4

Центр описанной окружности около треугольника находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника: $R = \dfrac{abc}{4S}$, где S - площадь треугольника, а a, b, c - длины сторон треугольника.

В четырехугольник можно вписать окружность, если суммы длин его противоположных сторон равны: $AB + CD = BC + AD$

Около четырехугольника можно описать окружность, если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180^0:

$\angle A + \angle C = 180^0$
$\angle B + \angle D = 180^0$

(Рис. 11.1.5):

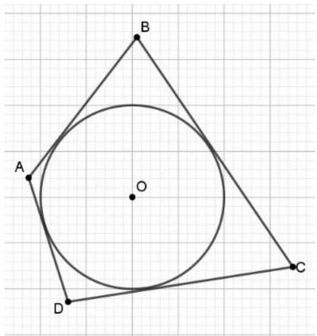


Рис. 11.1.5

Упражнения

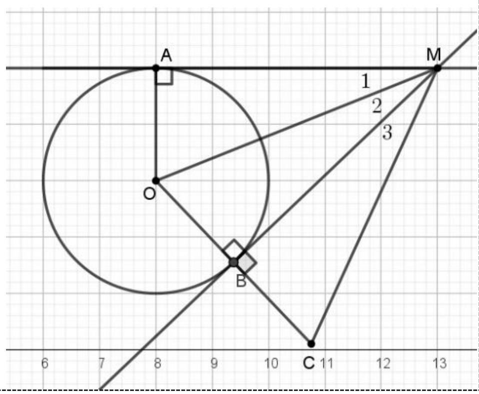
1. Даны квадрат $OABC$, сторона которого равна 6см, и окружность с центром в точке O радиуса 5см. какие из прямых $OA, AB, BC \text{ и } AC$ являются секущими по отношению к этой окружности.

2. Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

3. Угол между диаметром AB и хордой AC равен 30^0. Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный. (Указание: сначала доказать, что $\angle ADC = 30^0$)

4. Прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B. Точка C симметричная точке O относительно точки B. Докажите, что $\angle AMC = 3\angle BMC$.

MA, MB - касательные к окружности; Точки O и C симмтетричны относительно B.



Докажем, что $\angle AMC = 3\angle BMC$	

Доказательство
Если точки O и C симметричны относительно точки B, то $OB = BC = R$. $\triangle OAM = \triangle OMB$ по III признаку равенства треугольников. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. $\triangle OMB = \triangle MBC$ по III признаку равенства треугольников. Следовательно, $\angle 2 = \angle 3$. Так как $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$, то $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, следовательно, $\angle AMC = 3\angle BMC$.

5. Через точку A, лежащую вне окружности проведены касательная AB (B - точка касания) и секущая, проходящая через центр окружности, длина которой равна 50см. найдите радиус окружности, если $AB = 20$*см.*

6. Из внешней точки проведены к окружности касательная и секущая, которые соответственно равны 20см и 40см. Расстояние от центра окружности до секущей равно 8см. Найдите радиус окружности.

7. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причем $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM.

8. На окружности AB взяты точки C и D так, что $\cup AC = 37^0$, $\cup BD = 23^0$. Найдите хорду CD, если радиус окружности равен 15см.

9. Центральный угол AOB на 30^0 больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найдите каждый из этих углов.

10. Хорда AB стягивает дугу, равную 115^0, а хорда AC – дугу в 43^0. Найдите угол BAC.

11. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Найдите угол BEC, если $\cup AD = 54^0$, $\cup BC = 70^0$.

12. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если $AE = 5, BE = 2, CE = 2,5.$

13. Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r. Найдите: а) OA, если $r = 5см$, $\angle A = 60^0$; б) r, если $OA = 14дм$, $\angle A = 90^0$.

14. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите: а) AD и CD, если $BD = 5см$, $AC = 8,5см$; б) AC, если $BD = 11,4см$, $AD = 3,2см$.

15. Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 12:5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60см.

16. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15см. Найдите периметр этого четырехугольника.

17. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12см, а радиус вписанной в него окружности равен 5см. Найдите площадь четырехугольника.

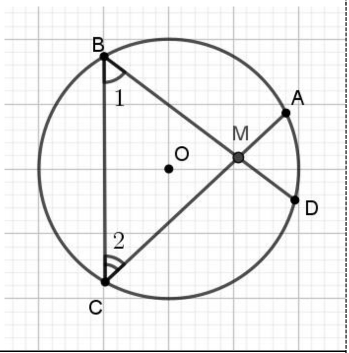
18. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 10см, а его площадь – 12см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.

19. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Найдите углы треугольника, если $\cup BC = 102^0$.

20. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120^0, боковая сторона треугольника равна 8см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

21. Найдите радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности, если радиус описанной окружности равен 10см.

22. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что $\angle AMB = \frac{1}{2}(\cup CD + \cup AB)$.

<table>
<tr><td>$AC \cap BD = M$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Докажем, что
$\angle AMB = \frac{1}{2}(\cup CD + \cup AB)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Доказательство</td></tr>
<tr><td colspan="2">Проведем хорду BC. Так как $\angle AMB$ - внешний угол треугольника BMC, то $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup CD,$ $\angle 2 = \frac{1}{2} \cup AB,$ поэтому $\angle AMB = \frac{1}{2}(\cup CD + \cup AB)$.</td></tr>
</table>

23. Найдите длину окружности, описанной около:

а) правильного треугольника со стороной a;

б) прямоугольного треугольника с катетами a и b;

в) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

24. Найдите длину маятника стенных часов, если угол его колебания составляет 38^0, а длина дуги, которую описывает конец маятника, равен 24см.

25. Найдите площадь круга, описанного около:

а) прямоугольника со сторонами a и b;

б) прямоугольного треугольника с катетом a и противолежащим углом α.

26. Диаметр основания царь-колокола, находящегося в Московском Кремле, равен 6,6м. Найдите площадь основания колокола.

27. Из круга, радиус которого10см, вырезан сектор с дугой в 60^0. Найдите площадь оставшейся части круга.

Дополнительные задачи

1. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они равны друг другу.

2. Найдите углы A, B и C выпуклого четырехугольника, если $\angle A = \angle B = \angle C$, а $\angle D = 135^0$.

3. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам $1, 2, 4, 5$.

4. Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если большая его сторона равна 15,2см, а один из его углов равен 45^0.

5. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16см и 22см, а высота проведенная к стороне AB равна 11см. Найдите высоту, проведенную к стороне BC.

6. Площадь прямоугольного треугольника равна 168см^2. Найдите катеты, если отношение их длин равно $\frac{7}{12}$.

7. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его большую сторону, равно 2,5см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

8. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 141см больше другого. Найдите гипотенузу, если катеты треугольника относятся как 6:5.

9. Найдите углы ромба, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

10. Стороны прямоугольника равны 3см и $\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образуют диагональ со сторонами прямоугольника.

11. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 12см, а угол BAD равен $47^0 50'$. Найдите площадь параллелограмма, если его диагональ BD перпендикулярна к стороне AB.

12. Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит ее на два подобных треугольника. Докажите, что $AC^2 = a \cdot b$, где a и b основания трапеции.

12. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.

14. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

15. Через концы хорды AB, равной радиусу окружности проведены две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите угол ABC.

16. Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 и пересекает ее в точке C. Найдите BB_1, если $AC = 4\ см, CA = 8\ см$.

17. Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E. Найдите основание AC треугольника, если периметр треугольника AEC равен 27см, а $AB = 18 см$.

18. В прямоугольном треугольнике ABC из точки M стороны AC проведен перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Докажите, что углы MHC и MBC равны.

19. В трапецию с основанием a и b можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

12. Векторы

12.1 Основные понятия

Понятие вектора. Равенство векторов.

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или вектором (Рис. 12.1.1):

Рис. 12.1.1

Вектор $\overrightarrow{AB}$ является примером ненулевого вектора.

Любая точка – пример нулевого вектора.

Длиной или модулем ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Коллинеарные векторы, равенство векторов.

Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называются сонаправленными, а во втором – противоположно направленными (Рис. 12.1.2):

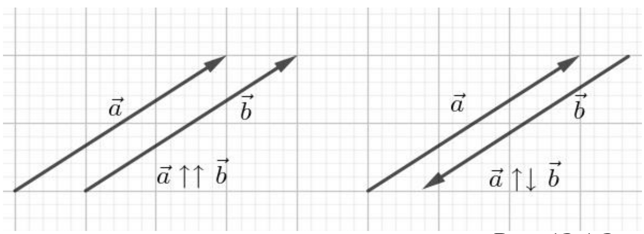


Рис. 12.1.2

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны:

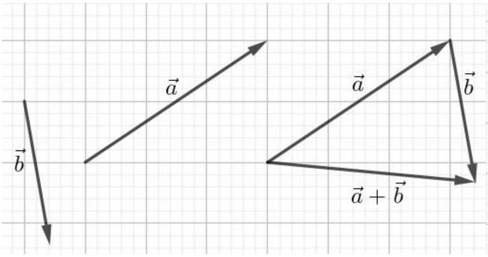
$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Равные векторы обозначается следующим образом: $\vec{a} = \vec{b}$.

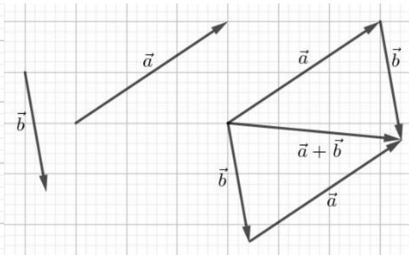
Сложение и вычитание векторов

Сложение векторов

Правило треугольника:

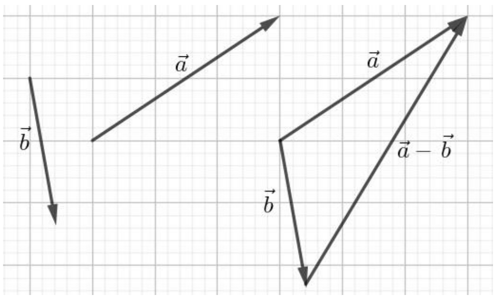


Правило параллелограмма:



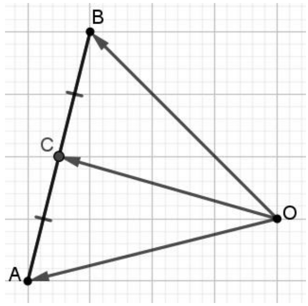
Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна $\vec{a}$: $\vec{a} - \vec{b}$



Вспомогательная задача:

$AC = CB$
$O \notin AB$



Докажем, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

Доказательство

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 0,\ т.к.\ AC = CB$

$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

Упражнения

1. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3см, BC = 4см$, M – середина стороны AB. Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}$.

2. Дан произвольный четырехугольник $MNPQ$. Докажите, что:

а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$, б) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}$.

3. В треугольнике ABC $AB=6, BC=8, \angle B=90^0$. Найдите:

а) $\left|\overrightarrow{BA}\right|-\left|\overrightarrow{BC}\right|$ *и* $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|$;

б) $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|$ *и* $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$;

в) $\left|\overrightarrow{BA}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|$ *и* $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|$;

г) $\left|\overrightarrow{AB}\right|-\left|\overrightarrow{BC}\right|$ *и* $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right|$.

4. Точки M и N – середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ *и* $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

5. Пусть $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n},\ \vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$. Выразите через m и n векторы:

а) $2\vec{x}-2\vec{y}$, б) $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$, в) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

6. Отрезки AA_1, BB_1 *и* CC_1 – медианы треугольника ABC. Выразите векторы AA_1, BB_1 *и* CC_1 через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ *и* $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

7. Пусть AA_1, BB_1 *и* CC_1- медианы треугольника ABC, а O – произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$.

8. В трапеции $ABCD$ основание AD в три раза больше основания BC. На стороне AD отмечена точка K, такая, что $AK = \frac{1}{3}AD.$ Выразите векторы $\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.

12.2 Метод координат

Координаты вектора

Отложим от начала координат единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называются координатными векторами (Рис. 12.2.1):

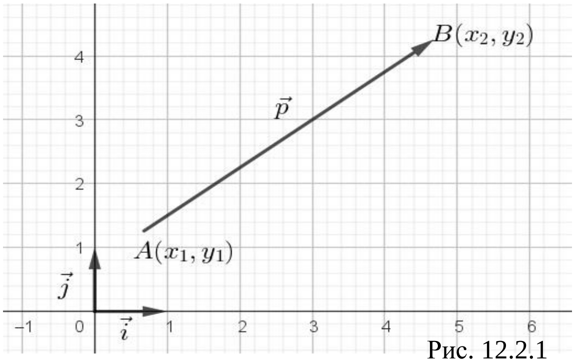


Рис. 12.2.1

Любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Числа x и y называются координатами вектора $\vec{p}$ в данной системе координат. Координаты вектора записываются в следующем виде - $\vec{p}\{x; y\}$, $AB\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0 \cdot 7 + 0 \cdot \vec{j}$, то его координаты равны $\vec{0}\{0; 0\}$.

Правило 1. Каждая координата суммы двух и более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Для $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ *и* $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ векторов получим $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}$.

Правило 2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Для векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ *и* $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ получим $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2\}$.

Правило 3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Для вектора $\vec{a}\{x; y\}$ получим $k\vec{a}\{kx; ky\}$.

Координаты середины отрезка (Рис. 12.2.1):

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

$C(x_0, y_0)$

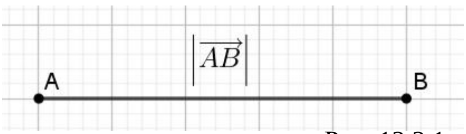


Рис. 12.2.1

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Длина вектора по его координатам (Рис. 12.2.2):

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

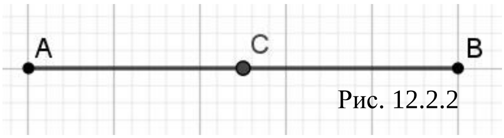


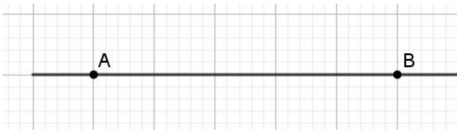
Рис. 12.2.2

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Уравнение прямой, проходящей через заданные точки (Рис. 12.2.3):

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$

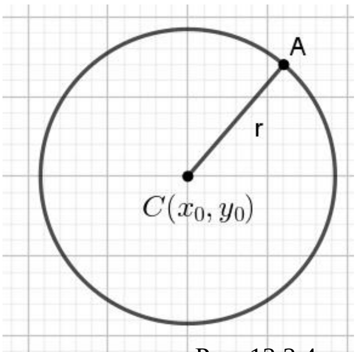


$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Рис. 12.2.3

Уравнение окружности по координатам центра и заданной точке (Рис. 12.2.4):

$C(x_0; y_0)$



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Рис. 12.2.4

Упражнения

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Найдите число x и y, удовлетворяющие равенству:

а) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$;

б) $4\vec{a} - x\vec{a} + 5\vec{b} + y\vec{b} = \vec{O}$;

в) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = \vec{O}$;

г) $\vec{a} + \vec{b} - 3y\vec{a} + x\vec{b} = \vec{O}$.

2. Найдите координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$, если

а) $\vec{a}\{3;2\}$, $\vec{b}\{2;5\}$;

б) $\vec{a}\{3;-4\}$, $\vec{b}\{1;5\}$;

в) $\vec{a}\{-4;-2\}$, $\vec{b}\{5;3\}$;

г) $\vec{a}\{2;7\}$, $\vec{b}\{-3;-7\}$.

3. Даны точки $A(5;-3)$. Найдите координаты точек C и D, если известно, что точка B – середина отрезка AC, а точка D - середина отрезка BC.

4. Найдите длины векторов:

а) $\vec{a}(5;9)$;
б) $\vec{b}(-3;4)$;
в) $\vec{c}(-10;-10)$;
г) $\vec{d}(10;17)$;
д) $\vec{l}(11;-11)$;
е) $\vec{f}(10;0)$.

5. Найдите расстояние между точками A и B, если:

а) $A(2;7)$, $B(-2;7)$;

б) $A(-5;1)$, $B(-5;-7)$;

в) $A(-3;0)$, $B(0;4)$;

г) $A(0;3)$, $B(-4;0)$.

6. Найдите периметр треугольника MNP, если:

$M(4;0)$, $N(12;-2)$, $P(5;-9)$.

7. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точки:

$а) A(1;2)\ и\ B(-3;4)$;

$б) C(1;1)\ и\ D(3;-5)$.

8. Найдите прямую, заданную уравнением:

а) $y=3$; б) $x=-2$; в) $y=-4$; г) $x=7$.

9. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $M(2;5)$ и параллельных осям координат.

10. Напишите уравнение окружности r с центром, если:

а) $A(0;5)$, $r=3$;

б) $A(-1;2)$, $r=2$;

в) $A(-3;-7)$, $r=\dfrac{1}{2}$;

г) $A(4;-3)$, $r=10$.

11. Напишите уравнение окружности с диаметром MN, если:

а) $M(-3;5)$, $N(7;-3)$;

б) $M(2;-1)$, $N(4;3)$.

12. Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(-3;0)$ *и* $B(0;9)$, если известно, что центр окружности лежит на оси ординат.

13. Тригонометрические тождества

13.1 Синус, косинус, тангенс и котангенс

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy и полуокружность с радиусом 1 с центром в начале координат. Назовем ее единичной полуокружностью.

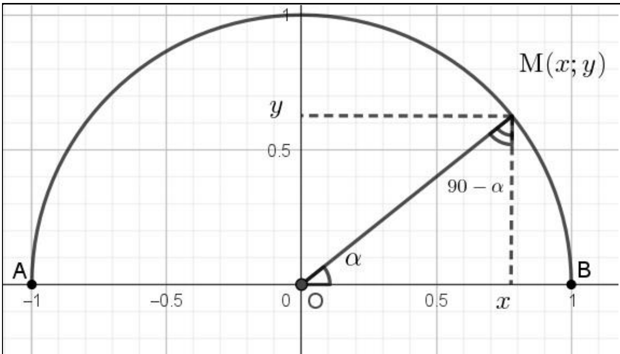


Рис. 13.1.1

$$\sin\alpha = \frac{MD}{OM}$$

$$\cos\alpha = \frac{OD}{OM}$$

$$tg\alpha = \frac{MD}{OD}$$

$$ctg\alpha = \frac{OD}{MD}$$

В прямоугольном треугольнике синус острого угла определяется как отношение противолежащего катета к гипотенузе, а косинус – отношение прилежащего катета к гипотенузе (Рис. 13.1.1):

Тангенс острого угла определяется как отношение синуса к косинусу, а котангенс – как отношение косинуса к синусу.

13.2 Формулы приведения

Из рисунка (Рис. 13.2.1) очевидно, что

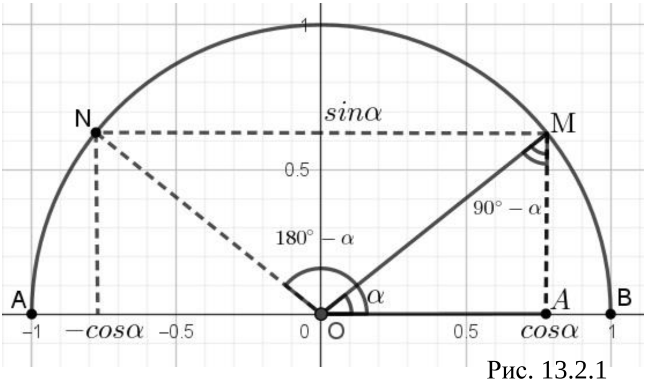


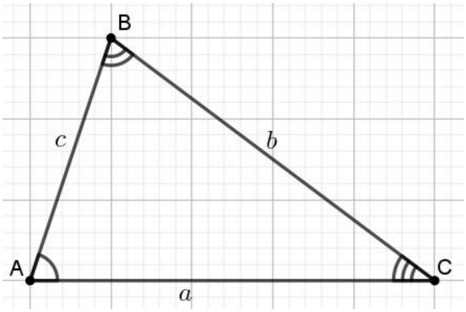
Рис. 13.2.1

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

Полученные формулы называются **формулами приведения:**

$$\sin\left(90^0 - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\sin\left(90^0 + \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(90^0 - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\cos\left(90^0 + \alpha\right) = -\sin\alpha$$
$$\sin\left(180^0 - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\cos\left(180^0 - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

13.3 Соотношения между сторонами и углами треугольника Теоремы синусов и косинусов



Теорема синусов

Отношение сторон треугольника к синусам противоположных им углов равны. Это же отношение равно диаметру описанной окружности.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2+2ac\cos B$$
$$c^2=a^2-b^2-2bc\cos C$$

13.4 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ $и$ $\cdot\vec{b}\{x_1;y_1\}$ выражается формулой: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

<u>Упражнения</u>

1. Найдите $\sin\alpha$, если:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha = -1$.

2. Найдите $\cos\alpha$; если:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha = 0$.

3. Смежные стороны параллелограмма равны a и b , а один из его углов равен α . Найдите диагонали параллелограмма и угол между ними.

4. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ $и$ $\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 2,\ \vec{b} = 3$, а угол между ними равен:

а) 45^0, б) 90^0, в) 135^0.

5. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

6. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ $и$ $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}\left\{\frac{1}{4};-1\right\},\ \vec{b}\{2;3\}$; б) $\vec{a}\{-5;6\},\ \vec{b}\{6;5\}$;

в) $\vec{a}\{1,5;2\}$, $\vec{b}\{4;-0,5\}$.

7. Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A(2;8)$, $B(-1;5)$, $C(3;1)$.

8. В треугольнике DEF $DE=4,5$ дм, $EF=9,9$ дм, $DF=70$ см. Найдите углы треугольника.

9. Используя теорему косинусов, решите треугольник ABC (найдите стороны и углы треугольника), если:

а) $AB=5см,\ AC=7,5см,\ \angle A=135^0$;

б) $AB=2\sqrt{2}дм,\ BC=3дм,\ \angle B=45^0$;

в) $AC=0,6м,\ BC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}дм,\ \angle C=150^0$.

Дополнительные задачи

1. Основание AD прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12см, $AB=5см$, $\angle D=45^0$. Найдите длины векторов $\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AC}$.

2. Докажите, что если $A, B, C\,и\,D$ – произвольные точки, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$.

3. Отрезок BB_1 – медиана треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{B_1C},\ \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC}$ через $\vec{x}=\overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$.

4. Точка O – середина медианы EG треугольника DEF. Выразите вектор $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{ED}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{EF}$.

5. Найдите расстояние от точки $M(3;-2)$;

а) до оси абсцесс;
б) до оси ординат;
в) до начала координат.

6. Найдите медиану AM треугольника ABC, вершины которого координаты $A(0;1)$, $B(1;-4)$, $C(5;2)$.

7. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $B(-1;3)$.

8. Вычислите $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ и $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right|=5,\ \left|\vec{b}\right|=8,\ a,\hat{}\hat{}\ b=60^0$.

9. Сторона параллелограмма равна 8,1см, а диагональ, равная 1см, образует с ней угол в 30^0. Найдите площадь параллелограмма.

10. Две стороны треугольника равны 7,5см и 3,2см. Высота, проведенная к большей стороне, равна 2,4см. Найдите высоту, проведенную к меньшей из данных сторон.

11. Площадь прямоугольного треугольника равна 168см^2. Найдите катеты, если отношение их длин равно $\frac{7}{12}$.

12. Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a – сторона треугольника.

13. Меньшая сторона параллелограмма равна 29см. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит ее на отрезки, равные 33см и 12см. Найдите площадь параллелограмма.

14. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

15. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

16. Два квадрата со стороной а имеют одну общую вершину, причем сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

17. Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна а) 60^0; б) 30^0; в) 90^0; г) 36^0; д) 18^0; е) 72^0.

18. Заполните таблицу

N	R	r	a_3	P	S
1	3				10
2					
3		2			
4			5		
5				6	

a_3 – сторона треугольника;

P – периметр треугольника;

r – радиус вписанной окружности;

S – площадь треугольника.

19. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами $R_1 \, и \, R_2, R_1 < R_2$. Вычислите площадь кольца, если $R_1 = 1,5 см, R_2 = 2,5 см$.

20. Из круга радиуса r вырезан квадрат, вписанный в окружность, которая ограничивает круг. Найдите площадь оставшейся части круга.

Ответы

Раздел 2: Треугольники

5) 75см; **7) б**. 46^0; **8)** 10см, 10см, 20см; **11) б.** BC=15см, CO=13см; **12)** 40^0.

Раздел 3: Параллельные прямые

5) а. четыре угла по150^0, четыре угла по 30^0; **б.** четыре угла по 55^0, четыре угла по 125^0.

Раздел 5: Прямоугольные треугольники

4) $57^0 30'; 57^0 30'; 65^0$ или $65^0, 65^0, 50^0$; **6) а.** $36^0, 72^0 и\ 72^0$;

б. $45^0, 45^0 и\ 90^0$; **8)** 7см, 7см, 11см; **9)** 2см или 8 см; **10)** 8см; **11)** 17,6см; **12)** AC=6см, AB=12см; **13)** 122^0.

Дополнительные задачи

2) 16см или 4см; **4)** 15м; **7)** 13см; **9)** $48^0; 66^0; 66^0$; **11)** KF=8см, $\angle DEK = 86^0, \angle EFD = 90^0$; **13)** 3см; **14) б.** $\angle ABD = 42^0; \angle ADC = 120^0$.

Тесты для самопроверки

А-1) 12,7см и 17,3см; **А-2) б.** 96^0; **А-3)** 36^0, 36^0, и 108^0;
А-4) 28см; **Б-1)** 29см, 29см; **Б-2) б.** 37^0; **Б-3)** 14см; **Б-4)** 18,5см;
В-1) 7см, 7см и 11см; **В-3)** 12см; В-4) 13см.

Раздел 6: Многоугольники - Раздел 7: Теорема Фалеса

1) б. 720^0; **в**. 1440^0; **2) б.** 3; **в)** 6; **г)** 5; **8)** 23мм, 20мм, 19мм, 18мм; **9)** 15см, 7см, 23см, 21см; **11)** 78см;

12)

$MN = PQ = 6см;\ NP = QM = 8см;\ \angle M = \angle P = 60^0;\ \angle N = \angle Q = 120^0$.

14) 18см; **15)** 42см; **16)** 75^0; **20)** 8см; **21) а.** 2, **б.** бесконеч.множ.; **в.** 1; **22)** O и X; 23) бесконеч.множ.

Раздел 8: Площадь

3) 12см; **4) а.** 25см и 10см; **б.** Каждая строка равна 3см; **5) а.** увеличится в 2 раза; **б)** увеличится в 4 раза; в) Не изменится;

6) а. 10см; **б.** 4см; **в.** 12см и 9см; **7)** 12см^2; **8) а.** 38,5см^2; **б.** $5\sqrt{2}$ см^2; **в.** 5,4см; **г.** $4\sqrt{2}$ см; **9)** 5,625см; **11) а.** 133см^2; **б.** 24см^2; **в.** 72см^2; **12)** 54см^2; **13)** 4,76см^2; **14)** 15см; **16) а.** 10см и 48см^2;

б. $6\sqrt{3}$ см и $27\sqrt{3}$ см^2; **в.** $7\sqrt{3}$ см и 49 см^2; **17) а.** $4\frac{8}{13}$; **б.** 9,6;

18) $\sqrt{7}$; **19)** 5см; **20)** 20см; **21)** 900см^2;

Раздел 9: Подобные треугольники

2) $x = 9;\ y = 21$; **3) а.** $EF = 5см;\ FC = 3,5см$;

б. $DE = 5\frac{5}{7}см;\ EC = 2\frac{2}{7}см$;

4) 6см и 6,5см; **5) а.** $\frac{1}{2}$; **б.** $\frac{1}{4}$; **6)** 10см; 7) 42см; **9)** 32мм, 18мм;

10) $1\frac{12}{13}см,\ 11\frac{1}{3}см$, **11)** 6,936см;

Раздел 10: Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

4) 60^0, 120^0, 60^0 и 120^0; **5)** 60^0 и 30^0; **6) а.** $b^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; **б.** $\frac{1}{4}a^2tg\alpha$.

Раздел 11: Окружность

1) а. $OA\ и\ AC$; **2)** 30^0; **5)** 21см; **6)** 17см; **7)** 12см; **8)** $15\sqrt{3}см$;

9) 60^0 и 30^0 или 140^0 и 110^0; **10)** $\approx 101^0\ или\ \approx 36^0$; **11)** 62^0;

12) 4.

14) а. $AD=3,5см,\ CD=5см$; **б.** $AC=14,6см$; **15)** 50см;

16) 30см; **17)** 60см^2; **18)** 1,2см; **19)** $\angle A=51^0$, $\angle B=\angle C=64^0 30'$;

20) 16см; **21)** 5см.

Дополнительные задачи

1) 90^0; **2)** 75^0; **3)** 30^0, 60^0, 120^0, 150^0; **4)** 115,52см^2; **5)** 8см; **6)** 14см и 24см; **7)** 5см; **8)** 61см; **9)** 60^0, 120^0, 60^0 и 120^0; **10)** 60^0 и 30^0;

11) $\approx 72см^2$; **15)** 120^0; **16)** $8\sqrt{2}см$; **17)** 9см; **19)** $\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

СААКЯН С.Л.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Компьютерный набор: Акопян Н.Б.

Издано: ООО «ИНФОКОПИ»