Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский экономический университет
имени Г.В. Плеханова»

Кафедра математических методов в экономике

ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ИГР»

Составители: канд. физ.- мат. наук, доц. А. Ю. Меерсон, канд. экон. наук Е.И.Смирнова

Предлагаются некоторые практические задачи, требующие применения методологии теории игр.

Для студентов, обучающихся по направлению «Экономика», профиль «Математические методы в экономике».

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр – это сравнительно новое направление в математике, своим развитием во многом обязанное Джону фон Нейману (1903-1957) и использующее в качестве фундамента матричные методы и теорию вероятностей. Задача теории игр заключается в отыскании оптимальных стратегий поведения участников некоторого конфликта с целью максимизации их «выигрышей» или минимизации «проигрышей». В качестве участников (игроков) могут рассматриваться игроки в покер, менеджеры конкурирующих корпораций, старающихся расширить свою долю на рынке, организаторы рекламных или предвыборных кампаний, генералы враждующих армий и т.п. Участникам игры приходится выбирать из некоторого числа альтернативных вариантов поведения (чистых стратегий), каждый из которых приводит к определенным последствиям, более или менее предпочтительным для игроков. В модели игры подробно описываются потенциальные результаты, на которые могут рассчитывать игроки, и указывается, как следует действовать игроку, чтобы получить наилучший результат с учетом возможных действий оппонентов.

Простейшим случаем игры является игра с участием двух игроков и с нулевой суммой, то есть игра, в которой выигрыш одного игрока означает эквивалентный проигрыш другого. Такую игру называют *матричной* и представляют в виде матрицы (см. рис.1).

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Ходы игрока } B \\
 & & \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Ходы} \\ \text{игрока} \\ A \end{array} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_j \\ \dots \\ A_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рис.1. Матрица игры двух игроков с нулевой суммой

Обозначим участников подобной игры латинскими буквами A и B. Пусть в распоряжении игрока A имеются m возможных ходов (стратегий) A_1, A_2, ... , A_m, а в распоряжении игрока B – n возможных ходов (стратегий) B_1, B_2, ... , B_n. Тогда игру можно представить в виде матрицы размерности $m \times n$, в которой каждая строка соответствует одному из m возможных ходов игрока A, а каждый столбец соответствует одному из n возможных ходов игрока B. Элемент матрицы a_{ij} представляет собой выигрыш игрока A в том случае, если он выбирает ход A_i, а игрок B в то же время выбирает ход B_j. При этом если величина a_{ij} отрицательна, то выигрыш достается игроку В. Если $a_{ij}=0$, то выбор соответствующих стратегий A_i и B_j приводит к ничейному результату. Заметим, что если выигрыши представлены в процентах, то они всегда неотрицательны, $a_{ij}=50$ означает ничью, а $a_{ij}<50$ - победу игрока B.

При решении задач теории игр исходят из следующих фундаментальных положений:

- игра повторяется многократно,
- игрок A стремится максимизировать свой выигрыш;
- игрок B стремится минимизировать свой проигрыш.

Если игрок A выбирает стратегию A_i, то игрок B будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии B_j свести выигрыш игрока A и, таким образом, свой проигрыш к минимуму:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, i = \overline{1, m}.$$

Игрок A при этом будет искать такую стратегию, при которой α_i стремится к максимуму:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j \alpha_{ij,} i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Величина α называется *нижней ценой игры* и представляет собой гарантированный выигрыш игрока A, не зависящий от действий игрока B. Придерживаясь максиминной стратегии, игрок A не может выиграть меньше величины α .

Аналогично определяются следующие величины:

$$\beta_j = \max_i a_{ij},\ j = \overline{1, n},$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij,} i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Величина β называется *верхней ценой игры* и представляет собой гарантированный проигрыш игрока В, не зависящий от действий игрока А. Придерживаясь минимаксной стратегии, игрок В не может проиграть больше величины β .

Если $\alpha = \beta,$ то соответствующие чистые стратегии являются *оптимальными*, а про игру говорят, что она имеет *седловую* точку, и называют *строго детерминированной*.

Величина $\nu = \alpha = \beta$ называется *ценой игры.* Ее значение определяет, кто является победителем в данной игре (если таковой имеется) и какова величина выигрыша.

При отсутствии седловой точки игра называется *не строго детерминированной*, применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В этом случае говорят о необходимости использования *смешенных стратегий.* Смешанной стратегией игрока А называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с определенной частотой или с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причем

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

Аналогично, смешанной стратегией игрока *B* называется применение чистых стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_m$ с определенной частотой или с вероятностями $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем

$$\sum_{j=1}^{n} q_i = 1, q_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Цена не строго детерминированной игры определяет средний выигрыш игрока *A* и средний проигрыш игрока *B* при использовании ими оптимальных смешанных стратегий.

Если в матрице игры все элементы *k*-й строки $A_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$ не меньше соответствующих элементов *s*-й строки $A_s = (a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn})$, а хотя бы один строго больше, то строка A_k называется *доминирующей*, а строка A_s - *доминируемой.* Аналогично определяются понятия «*доминирующий столбец*» и «*доминируемый столбец*». Игрокам невыгодно применять доминируемые стратегии, поэтому из матрицы игры соответствующие строки и столбцы можно удалить, уменьшив тем самым ее размерность.

Если же игра с участием двух игроков имеет ненулевую сумму, то называется *биматричной* и задается двумя матрицами, которые, в свою очередь, определяют: первая – выигрыши игрока A при выборе им хода A_i и оппонентом хода B_j, вторая – проигрыши игрока B при выборе им хода B_j и оппонентом хода A_i.

1. РЕШЕНИЕ ИГРЫ 2x2

Пример. Найдем решение матричной игры

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Припишем строкам вероятности p и $1 - p$ соответственно. Умножив поэлементно $(p, p\text{-}1)$ на 1-й столбец матрицы и сложив произведения, получим линейную зависимость

$$w(p) = 1 \times p + (-1) \times (1 - p) = 2p - 1.$$

Это средний выигрыш игрока A при применении игроком B стратегии B_1. Умножив $(p, p\text{-}1)$ поэлементно на 2-й столбец матрицы и сложив произведения, получим линейную зависимость

$$w(p) = (-1) \times p + 1 \times (1 - p) = -2p + 1.$$

Это средний выигрыш игрока A при применении игроком B стратегии B_2. Приравниваем полученные зависимости:

$$2p - 1 = -2p + 1.$$

Отсюда $p = ½$, $1 - p = ½$, то есть оптимальная смешанная стратегия игрока A – это $P = (½, ½)$ (каждую из стратегий надо применять с частотой ½). Подставив p= ½ в любую из зависимостей $w(p)$, найдем цену игры $v=w(½) = 0$.

Теперь припишем столбцам матрицы вероятности q и $1–q$ соответственно. Умножив поэлементно $(q, 1–q)$ на 1-ю строку матрицы и сложив произведения, получим линейную зависимость

$$w(q) = 1 \times q + (-1) \times (1 - q) = 2q - 1.$$

Это средний выигрыш игрока *A* (равный проигрышу игрока *B*) при применении игроком *A* стратегии A_1. Умножив строку $(q, 1 - q)$ на 2-ю строку матрицы и сложив произведения, получим линейную зависимость

$$w(q) = (-1) \times q + 1 \times (1 - q) = -2q + 1.$$

Это средний выигрыш игрока *A* (равный проигрышу игрока *B*) при применении игроком *A* стратегии A_2. Приравняем полученные зависимости:

$$2q - 1 = -2q + 1.$$

Отсюда q= ½, 1 – q = ½, то есть оптимальная смешанная стратегия игрока *B* – это $Q = (½, ½)$ (каждую из стратегий надо применять с частотой ½).

Решение о конкретном выборе одной из своих стратегий каждый из игроков может принимать с помощью подбрасывания монеты.

Задачи 1-10. Найти решение игры 2 х 2.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\mathbf{A_{11}}$	3	4	4	2	2	4	3	4	1	2
$\mathbf{A_{12}}$	2	2	3	3	1	2	0	1	3	4
$\mathbf{A_{21}}$	2	2	3	3	1	2	1	2	3	4
$\mathbf{A_{22}}$	3	3	4	2	4	4	2	3	0	1

2. РЕШЕНИЕ ИГРЫ 2xn

Приписав 1-й строке вероятность *p*, а 2-й строке – вероятность *1 – p*, получим *n* линейных зависимостей. Изобразим их графики.

Возьмем *нижнюю огибающую*, то есть такую ломаную из отрезков построенных прямых, что вся картинка лежит выше этой ломаной. Точка с наибольшей координатой *w* дает нам *p* (1-я координата) и цену игры v (2-я координата).

Пусть это точка пересечения *i*-й и *j*-й прямых. Тогда припишем

i-му столбцу вероятность q, а j-му столбцу – вероятность $1–q$. Всем остальным столбцам припишем нулевые вероятности. Находим q и $1–q$.

Пример. Найдем графически решение матричной игры $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

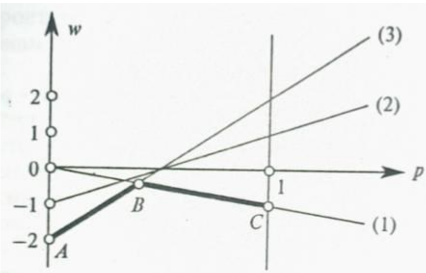
1-й столбец доминирует над 3-м столбцом. Поэтому отбросим 3-й столбец. Вероятность $q_3 = 0$. Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Припишем строкам вероятности p и $1- p$ соответственно. Получим линейные зависимости

$$w(p) = (-1)\times p + 0\times(1-p) = -p \ (1),$$
$$w(p) = 1\times p + (-1)\times(1-p) = 2p-1 \ (2),$$
$$w(p) = 2\times p + (-2)\times(1-p) = 4p-2 \ (3).$$

Изобразим их графики. $0 \le p \le 1$.



Возьмем нижнюю огибающую. Это ломаная ABC. Точка B – это точка с наибольшей второй координатой на этой огибающей. Она является точкой пересечения прямых (1) и (3). Поэтому припишем 1-му столбцу вероятность q, а 3-му столбцу – вероятность $1–q$. Найдем координаты точки B.

$$-p = 4p-2,$$

$p = 2/5$ (вероятность применения игроком *A* его 1-й стратегии),

$1 - p = 3/5$ (вероятность применения игроком *A* его 2-й стратегии).

Теперь найдем ненулевые частоты выбора стратегий игроком *B*, приписав столбцам матрицы (после вычеркивания доминируемого столбца) вероятности *q*, *0* и *1-q*. Имеем:

$$-1 \times q + 1 \times 0 + 2 \times (1 - q) = 0 \times q + (-1) \times 0 + (-2) \times (1 - q).$$

Отсюда

$$q = 4/5, 1 - q = 1/5.$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока *A* – это вектор $P = (2/5, 3/5)$, игрока *B* – вектор $Q = (4/5, 0, 0, 1/5)$.

Цена игры

$$v = w(2/5) = -2/5.$$

Замечание. Чтобы определить, когда использовать ту или иную чистую стратегию, все цифры (1, 2, …, 9, 0) игрок *A* делит на две полноценные “пятерки”. Первые две цифры пятерки относятся к 1-й стратегии, а три последние – ко 2-й стратегии: 1-я стратегия (1, 2, 6, 7) и 2-я стратегия (3, 4, 5, 8, 9, 0). Перед своим очередным ходом игрок А смотрит в таблицу случайных чисел. Если “выпадет” 1, 2, 6 или 7, то он играет 1-ю стратегию; если “выпадет” 3, 4, 5, 8, 9 или 0, то он играет 2-ю стратегию.

Задачи 11-20. Найти графически решение игры 2х3.

	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$\mathbf{A_{11}}$	1	1	2	4	2	1	0	1	2	3
$\mathbf{A_{12}}$	3	4	4	2	0	3	3	2	1	2
$\mathbf{A_{13}}$	2	2	3	3	1	4	2	1	4	5
$\mathbf{A_{21}}$	2	4	5	1	1	3	3	2	2	2
$\mathbf{A_{22}}$	0	1	3	3	4	2	1	3	3	4
$\mathbf{A_{23}}$	3	3	4	2	2	1	2	5	1	1

3. РЕШЕНИЕ ИГРЫ m x 2

Приписав 1-му столбцу вероятность *q*, а 2-му столбцу – вероятность *1 – q*, получим *m* линейных зависимостей. Изобразим их графики.

Возьмем *верхнюю огибающую*, то есть такую ломаную из отрезков построенных прямых, что вся картинка лежит ниже этой ломаной. Точка с наименьшей координатой w дает нам q (1-я координата) и цену игры v (2-я координата).

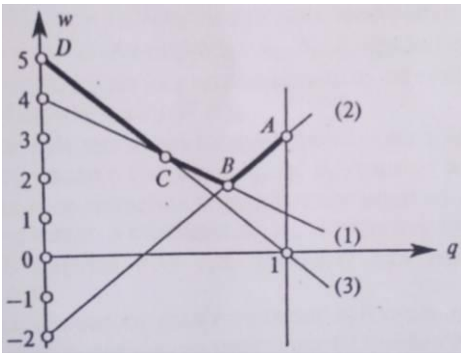
Пусть это точка пересечения i-й и j-й прямых. Тогда припишем i-й строке вероятность p, а j-й строке – вероятность *1–p*. Всем остальным строкам припишем нулевые вероятности.
Находим p и *1–p*.

Пример. Найдем решение матричной игры $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Припишем столбцам вероятности q и *1-q* соответственно. Получим линейные зависимости:

$$w(q) = 1 \times q + 4 \times (1-q) = 4 - 3q \quad (1),$$
$$w(q) = 3 \times q + (-2) \times (1-q) = 5q - 2 \quad (2),$$
$$w(q) = 0 \times q + 5 \times (1-q) = 5 - 5q \quad (3).$$

Изобразим их графики. $0 \leq q \leq 1$.



Возьмем *верхнюю огибающую*. Это ломаная *ABCD.* Точка В – это точка с наименьшей второй координатой на этой огибающей. Точка

B – это точка пересечения прямых (1) и (2). Поэтому припишем 1-й строке вероятность p, а 2-й строке – вероятность $1 - p$. Оставшейся строке припишем нулевую вероятность.

Найдем координаты точки B.

$$4 - 3q = 5q - 2,$$

$q = \frac{3}{4}$ (вероятность применения игроком *B* его 1-й стратегии),

$1 - q = \frac{1}{4}$ (вероятность применения игроком *B* его 2-й стратегии).

Найдем решение для игрока *A*.

$$1 \times p = 3 \times (1 - p) + 0 \times 0 = 4 \times p + (-2) \times (1 - p).$$

Отсюда $p = \frac{5}{8}, 1 - p = \frac{3}{8}$.

Таким образом, оптимальная стратегия игрока *A* – это вектор $P = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, 0\right)$, игрока B – вектор $Q = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Цена игры

$$v = w\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}.$$

Замечание. Чтобы определить, когда использовать ту или иную чистую стратегию, все цифры от 1 до 8 игрок *B* делит на полноценные “четверки”. Первые три цифры относятся к первой стратегии, а последняя – ко 2-й стратегии: 1-я стратегия (1, 2, 3, 5, 6, 7) и 2-я стратегия (4, 8). Перед своим очередным ходом игрок B смотрит в таблицу случайных чисел. Если “выпадает” 1, 2, 3, 5, 6 или 7, то он играет 1-ю стратегию; если “выпадает” 4 или 8, то он играет вторую стратегию.

Задачи 21-30. Найти графически решение игры 3 x 2.

	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A_{11}	0	0	1	1	2	2	1	3	3	4
A_{12}	3	4	4	2	1	3	3	4	1	2
A_{21}	1	1	2	0	0	3	3	4	1	2
A_{22}	2	2	3	3	4	2	1	3	2	4
A_{31}	2	2	3	2	1	1	2	5	0	3
A_{32}	1	1	2	1	2	4	2	2	3	3

4. РЕШЕНИЕ ИГРЫ m x n

Если точное решение матричной игры оказывается громоздким, можно ограничиться приближенным решением. В основе этого метода лежит предположение, что игроки выбирают свои стратегии в очередной партии, руководствуясь накапливающимся опытом уже сыгранных партий. Достоинство метода – его простота.

Пример. Найдем приближенное решение матричной игры

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,9 & 0,7 \\ 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,7 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix},$$

смоделировав 10 партий.

Чтобы избавиться от дробей, умножим все элементы матрицы на 10. От этого оптимальные стратегии игроков не изменятся, а цена игры тоже умножится на 10.

Получим матрицу: $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Составляем таблицу (см. рис.2). Игрок *A* начинает со своей 1-й стратегии. Соответствующие выигрыши (1-я строка матрицы) запишем в столбцы B_1, B_2, B_3 и определим среди них минимальный: min (7, 9, 7) = 7 (в случае, когда их несколько, берем тот, что расположен левее). Этот минимум обведем в кружок. Он соответствует стратегии B_1. Поэтому соответствующие выигрыши (1-й столбец матрицы) запишем в столбцы A_1, A_2, A_3 и определим среди них максимальный: max (7, 9, 7) = 9 (в случае, когда их несколько, берем тот, что расположен левее). Этот максимум обведем. Он соответствует стратегии A_2. Поэтому во второй партии игрок *A* ответит стратегией A_2. Соответствующие выигрыши (2-я строка) надо прибавить к числам в столбцах B_1, B_2, B_3 предыдущей строки игрока *A* и определить минимальное среди полученных: min (16, 16, 15) = 15, что соответствует стратегии B_3. Поэтому соответствующие выигрыши (3-й столбец) надо прибавить к числам в столбцах A_1, A_2, A_3 предыдущей строки игрока *B* и определить среди них максимальный: max (14, 17, 15) = 17, что соответствует стратегии A_2. И т.д.

Приближенное значение нижней цены игры в каждой партии α

Номер партии	Игрок А				Игрок В				Приближенные значения цены		
	Стратегия	Накопленный выигрыш при различных стратегиях игрока В			Стратегия	Накопленный выигрыш при различных стратегиях игрока А			α	β	$v = (\alpha + \beta)/2$
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3			
1	A_1	7	9	7	B_1	7	9	7	7	9	8
2	A_2	16	16	15	B_3	14	17	15	15/2	17/2	8
3	A_2	25	23	23	B_2	23	24	23	23/3	24/3	47/6
4	A_2	34	30	31	B_2	32	31	31	30/4	32/4	62/8
5	A_1	41	39	38	B_3	39	39	39	38/5	39/5	77/10
6	A_1	48	48	45	B_3	46	47	47	45/6	47/6	92/12
7	A_2	57	55	53	B_3	53	55	55	53/7	55/7	108/14
8	A_2	66	62	61	B_3	61	63	63	61/8	63/8	124/16
9	A_2	75	69	69	B_2	70	70	71	69/9	71/9	140/18
10	A_3	82	77	77	B_2	79	77	79	7,7	7,9	7,8

Рис.2. Таблица приближенного решения игры $m \times n$.

рассчитывается как обведенное число в столбцах B_1, B_2, B_3, деленное на номер партии.

Приближенное значение верхней цены игры в каждой партии β рассчитывается как обведенное число в столбцах A_1, A_2, A_3, деленное на номер партии.

После 10 партий $\nu \approx 7{,}8$. Поэтому для исходной матрицы цена игры составляет $\nu \approx 7{,}8/10 = 7{,}8$.

$p_i \approx$ (число использований стратегии A_i)/(число партий).

$q_j \approx$ (число использований стратегии B_j)/(число партий).

Число использований стратегии A_i = число отмеченных элементов в столбце Ai.

Число использований стратегии B_j = число отмеченных элементов в столбце B_j.

После 10 партий $p_1 \approx {}^{3}\!/_{10}$, $p_2 \approx {}^{6}\!/_{10}$, $p_3 \approx {}^{1}\!/_{10}$ (за 10 партий игрок A 3 раза воспользовался стратегией A_1, 6 раз – стратегией A_2, 1 раз – стратегией A_3).

$q_1 \approx {}^{1}\!/_{10}$, $q_2 \approx {}^{4}\!/_{10}$, $q_3 = {}^{5}\!/_{10}$.

Задачи 31-40.

а) Найти решение матричной игры, используя методы линейного программирования.

б) Найти приближенное решение матричной игры, выполнив 10 итераций.

	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
A_{11}	1	1	2	0	2	2	2	3	3	4
A_{12}	3	4	4	2	1	3	3	4	1	2
A_{13}	2	2	3	3	1	0	0	1	2	3
A_{14}	0	0	1	1	3	2	1	2	4	5
A_{21}	0	1	1	1	1	3	3	4	2	3
A_{22}	2	2	3	3	4	2	1	2	1	2
A_{23}	3	3	4	2	2	2	2	3	3	4
A_{24}	1	1	2	0	0	4	4	5	1	2
A_{31}	2	2	3	2	2	2	2	3	2	3
A_{32}	1	1	2	1	1	4	1	2	3	4
A_{33}	1	1	2	1	1	3	3	4	0	1
A_{34}	3	3	4	3	3	1	1	2	1	2

5. ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

5.1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

5.1.1. КРИТЕРИИ МАКСИМИЗАЦИИ СРЕДНЕОЖИДАЕМОГО ВЫИГРЫША И МИНИМИЗАЦИИ СРЕДНЕОЖИДАЕМОГО РИСКА

Принятие управленческих решений предполагает наличие выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях риска или неопределенности. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не с другим игроком, а с окружающей средой.

В процессе принятия решения игрок имеет информацию о нескольких возможных состояниях окружающей среды и либо располагает оценками вероятностей состояний, которые может принять окружающая среда в данный момент времени (то есть действует *в условиях риска*), либо не располагает и в этом случае сталкивается с проблемой неопределенности относительно этих состояний. Подобные игры называются *играми с природой*. Под природой понимается вся совокупность внешних обстоятельств, в которых игрок принимает решение. Игрок при этом называется *лицом, принимающим решение*.

Методы принятия решений в условиях риска разрабатываются и обосновываются в рамках так называемой теории статистических решений. При этом когда состояниям природы поставлены в соответствие вероятности, заданные экспертно либо вычисленные, решение обычно принимается на основе критерия максимизации среднеожидаемого.

Критерий максимизации среднеожидаемого выигрыша используется, если заданы вероятности наступления состояний природы: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда оптимальной будет та стратегия, для которой достигается значение

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} p_j * \alpha_{ij}, i = \overline{1,m}$$

Критерий минимизации среднеожидаемого риска также используется при заданных вероятностях наступления состояний среды. В этом случае оптимальной будет стратегия, для которой достигается значение

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} p_j * r_{ij}, i = \overline{1, m}.$$

Замечание. Оптимальные стратегии по критерию максимизации среднеожидаемого выигрыша и минимизации среднеожидаемого риска совпадают.

5.1.2. ДЕРЕВО РЕШЕНИЙ

На практике результат одного решения заставляет нас принимать следующее решение и т. д. Когда нужно принять *несколько* решений *в условиях риска*, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего решения или исходов испытаний, то применяют схему, называемую деревом решений.

Дерево решений - это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, альтернативные состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды.

Рисуют деревья слева направо. Места, где принимаются решения, обозначают квадратами (□), места появления исходов – кругами (○), возможные решения - пунктирными линиями (---------), возможные исходы - сплошными линиями (________).

Для каждой альтернативы мы считаем *ожидаемую стоимостную оценку* (EMV) - максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятность реализации выигрышей, для всех возможных вариантов (как в п. 5.1.1).

Пример. Главному инженеру компании надо решить, монтировать ли новую производственную линию, использующую новейшую технологию. Если новая линия будет работать безотказно, компания получит прибыль 200 млн. рублей. Если же она откажет, компания может потерять 150 млн. рублей. По оценкам главного инженера, существует 60% шансов, что новая производственная линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, а затем уже решать, монтировать или нет производственную линию. Эксперимент обойдется в 10 млн. рублей.

Главный инженер считает, что существует 50% шансов, что экспериментальная установка будет работать. Если экспериментальная установка будет работать, то 90% шансов за то, что смонтированная производственная линия также будет работать. Если же экспериментальная установка не будет работать, то только 20% шансов за то, что производственная линия заработает. Следует ли строить экспериментальную установку? Следует ли монтировать производственную линию? Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

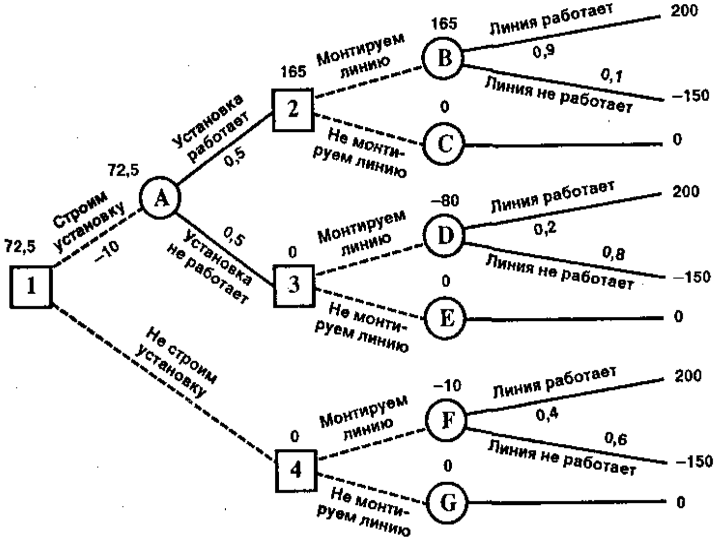


Рис.3. Дерево решения

В узле F возможны исходы «линия работает» с вероятностью 0,4 (что приносит прибыль 200 млн. рублей) и «линия не работает» с вероятностью 0,6 (что приносит убыток -150 млн. рублей). Следовательно, оценка узла F

$$EMV(F) = 0{,}4 \times 200 + 0{,}6 \times (-150) = -10 \text{ млн. рублей.}$$

Это число мы пишем над узлом F.

$$EMV(G) = 0.$$

В узле 4 мы выбираем между решением «монтируем линию» (оценка этого решения $EMV(F) = -10$) и решением «не монтируем линию» (оценка этого решения $EMV(G) = 0$):

$$EMV(4) = \max\big(EMV(F), EMV(G)\big) = \max\big(-10{,}0\big) = 0 =$$
$$= EMV(G).$$

Эту оценку мы пишем над узлом 4, а решение «монтируем линию» отбрасываем и зачеркиваем.

Аналогично:

$$EMV(B) = 0{,}9 \times 200 + 0{,}1 \times (-150) = 180 - 15 = 165.$$
$$EMV(C) = 0.$$
$$EMV(2) = \max\big(EMV(B), EMV(C)\big) = \max\big(165{,}0\big) = 165 =$$
$$= EMV(B).$$

Поэтому в узле 2 отбрасываем возможное решение «не монтируем линию».

$$EMV(D) = 0{,}2 \times 200 + 0{,}8 \times (-150) = 40 - 120 = -80.$$
$$EMV(E) = 0.$$
$$EMV(3) = \max\big(EMV(D), EMV(E)\big) = \max\big(-80{,}0\big) = -80 =$$
$$= EMV(E).$$

Поэтому в узле 3 отбрасываем возможное решение «монтируем линию».

$$EMV(A) = 0{,}5 \times 165 + 0{,}5 \times 0 - 10 = 82{,}5 - 10 = 72{,}5.$$
$$EMV(1) = \max\big(EMV(A), EMV(4)\big) = \max\big(72{,}5;0\big) = 72{,}5 =$$
$$= EMV(A).$$

Поэтому в узле 1 отбрасываем возможное решение «не строим установку».

Ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения равна 72,5 млн. рублей. Строим установку. Если установка работает, то монтируем линию. Если установка не работает, то линию монтировать не следует.

Задачи 41-50. Построить дерево решения и найти оптимальную стратегию поведения

Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий:

а) построить большой завод стоимостью M_1 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере R_1 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1 и низкий спрос (ежегодные убытки R_2 тысяч долларов) с вероятностью p_2;

б) построить маленький завод стоимостью M_2 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере T_1 тысяч долларов в течении следующих 5 лет) с вероятностью p_1 и низкий спрос (ежегодные убытки T_2 тысяч долларов) с вероятностью p_2;

в) отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью p_3 и p_4 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на p_5 и p_6 соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Какое решение следует принять руководству компании и на какие финансовые последствия при этом рассчитывать?

	M_1	M_2	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	R_1	R_2	T_1	T_2
41	600	350	0,7	0,3	0,8	0,2	0,9	0,1	250	50	150	25
42	605	345	0,65	0,35	0,75	0,25	0,91	0,09	245	45	145	20
43	610	340	0,75	0,25	0,85	0,15	0,92	0,08	240	40	140	15
44	615	335	0,7	0,3	0,85	0,15	0,93	0,07	235	3	135	10
45	620	330	0,65	0,35	0,8	0,2	0,94	0,06	230	30	130	5
46	625	325	0,75	0,25	0,75	0,25	0,95	0,05	255	55	155	30
47	630	320	0,7	0,3	0,75	0,25	0,94	0,06	260	60	160	35
48	635	315	0,65	0,35	0,85	0,15	0,93	0,07	265	65	165	40
49	640	310	0,75	0,25	0,8	0,2	0,92	0,08	270	70	170	45
50	645	305	0,7	0,3	0,75	0,25	0,91	0,09	275	75	175	50

5.2. Принятие решений в условиях неопределенности

Когда вероятности, с которыми природа может принимать те или иные состояния, неизвестны, то принятие решения (выбор игроком оптимальной стратегии) происходит *в условиях неопределенности.*

Пусть природа может находиться в одном из множества состояний Si. Будем считать, что множество состояний Si конечно $\left(i=\overline{1,n}\right)$ или что, по крайней мере, состояния можно пронумеровать. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения. Будем считать, что множество управленческих решений (планов, стратегий) Rj также конечно $\left(j=\overline{1,m}\right)$.

Допустим, каждому действию Rj и каждому возможному состоянию природы Si соответствует число (исход) Vji , определяющее результат (выигрыш, полезность) при выборе j-ого действия и реализации i-го состояния.

В ряде случаев в качестве результатов рассматривается матрица рисков $\{rji\}$.

Элементы матрицы рисков $\{rji\}$ связаны с элементами матрицы полезности (выигрышей) следующим соотношением:

$$r_{ji}=V_i\text{-}V_{ji} \qquad (5.2.1)$$

где $V_i=maxV_{ji}$ – максимальный элемент в столбце i матрицы полезности.

Если матрица возможных результатов $\{V_{ji}\}$ представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков $\{r_{ji}\}$ следует определять по формуле:

$$r_{ji}=V_{ji}\text{-}V_i, \qquad (5.1.2)$$

где $V_i=\min\limits_j V_{ji}$ - минимальный элемент в столбце i матрицы потерь (результатов).

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев, среди которых: критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица и др.

5.2.1. Критерий Лапласа

Данный критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния природы Si полагаются равновероятными:

$$q_i = 1/n, i=\overline{1,n}.$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей выигрышей $\{V_{ji}\}$, то для выбора оптимальной стратегии выбирают максимальное значение среди предварительно вычисленных по строкам матрицы средних арифметических, дающее наибольший ожидаемый выигрыш, т.е.

$$\max_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V_{ji}\right\}. \qquad (5.1.3)$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей *{rji}*, то критерий Лапласа принимает следующий вид:

$$\min_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_{ji}\right\}. \qquad (5.1.4)$$

5.2.2. Критерий Вальда (минимаксный или максиминный критерий)

Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j. Тем самым, выбранные варианты полностью исключают риск, т. е. лицо, принимающее решение, не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. К тому же, данный критерий не требует знания вероятностей состояний природы *Si*.

Если в исходной матрице результат *Vji* представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *минимаксный критерий:*

$$Z = \min_{j}\max_{i}\{V_{ji}\}. \qquad (5.1.5)$$

Таким образом, для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов *{Vji}* найти сначала наибольший элемент, а затем среди них выбрать наименьший.

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *максиминный критерий:*

$$Z = \max_{j}\min_{i}\{V_{ji}\}. \qquad (5.1.6)$$

5.2.3. Критерий Сэвиджа

Он использует матрицу рисков $\{r_{ji}\}$, элементы которой можно рассчитать по формулам (5.1.1)-(5.1.2), и предписывает в условиях неопределенности выбирать ту стратегию R_j, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т. е.

$$Z = \max_j \min_i \{r_{ji}\}. \qquad (5.1.7)$$

5.2.4. Критерий Гурвица

Данный критерий основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью (1-α) и в самом выгодном состоянии с вероятностью (1-α), где α - коэффициент доверия.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путём взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами (1-α) и α, где

$$0 \le \alpha \le 1.$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов *{Vji}* представляет выигрыш, прибыль, полезность, доход и т. п., то критерий Гурвица записывается как

$$Z = \max_j \left[\alpha \max_i V_{ji} + (1-\alpha) \min_i V_{ji}\right] \qquad (5.1.8)$$

Если матрица возможных результатов *{Vji}* представляет затраты (потери), то критерий Гурвица записывается как

$$Z = \min_j \left[\alpha \min_i V_{ji} + (1-\alpha) \max_i V_{ji}\right] \qquad (5.1.9)$$

Если α = 0, получим критерий Вальда, а если α = 1, то приходим к решающему правилу вида

$$\max_j \max_i V_{ji}. \qquad (5.1.10)$$

Пример. Телефонная компания должна определить уровень своих возможностей по предоставлению телефонных услуг так, чтобы удовлетворить спрос своих клиентов на планируемый период.

Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень возможностей телефонной компании (например, с точки зрения возможных затрат на ввод нового тарифа). Отклонения от этих уровней могут приводить к дополнительным затратам. Ниже приводится таблица, определяющая возможные прогнозируемые затраты на развитие телефонных возможностей.

Варианты предоставляемых компанией телефонных услуг	Варианты спроса на телефонные услуги			
	$1\ (S_1)$	$2\ (S_2)$	$3\ (S_3)$	$4\ (S_4)$
$1\ (R_1)$	7	10	18	22
$2\ (R_2)$	9	6	8	25
$3\ (R_3)$	25	18	16	21
$4\ (R_4)$	24	22	20	26

Необходимо выбрать оптимальную стратегию, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (α=0,5).

Решение.

Имеются четыре варианта спроса на телефонные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний природы S_1, S_2, S_3, S_4.

Известны также четыре варианта предоставляемых компанией телефонных услуг R_1, R_2, R_3, R_4.

Критерий Лапласа.

Этот критерий предполагает, что S_1, S_2, S_3, S_4 равновероятны, т.е.

$$p = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Тогда ожидаемые затраты при различных действиях (стратегиях) R_1, R_2, R_3, R_4 составляют:

$W\{R_1\}=0{,}25 \bullet (7 + 10 + 18 + 22)=14{,}25;$

$W\{R_2\}=0{,}25 \bullet (9 + 6 + 8 + 25)=12;$

$W\{R_3\}=0{,}25 \bullet (21 +18 + 16 + 21)=19;$

$W\{R_4\}=0{,}25 \bullet (24 + 22 + 20 + 26)=23.$

Таким образом, наилучшей стратегией развития телефонных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет R_2.

Критерий Вальда.

Так как V_{ji} представляет потери (затраты), то применим максиминный критерий. Необходимые результаты вычислений приведены в следующей таблице:

Стратегия R_j	Затраты (V_{ji}), ден. ед.				$\max(V_{ji})$	$\min\max(V_{ji})$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	7	10	18	22	22	-
R_2	9	6	8	25	25	-
R_3	21	18	16	21	21	21
R_4	24	22	20	26	26	-

Наилучшей стратегией развития телефонных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшее из худшего» (критерий Вальда) будет третья (R_3).

Критерий Сэвиджа.

Заданная матрица определяет потери (затраты). По формуле (5.1.2) вычислим элементы матрицы рисков $\{r_{ji}\}$ и запишем их в следующую таблицу:

Стратегия R_j	Величина риска (r_{ji})				$\max(r_{ji})$	$\min\max(r_{ji})$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	4	10	1	10	-
R_2	2	0	0	4	4	4
R_3	14	12	8	0	14	-
R_4	17	16	12	5	17	-

Результаты вычислений показывают, что применение критерия Сэвиджа приводит к выбору в качестве оптимальной второй стратегии (R_2), обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Критерий Гурвица.

Положим α =0,5. Результаты необходимых вычислений приведены в таблице:

	S_1	S_2	S_3	S_4	min V_{ji}	max V_{ji}	$W = \alpha \times \min V_{ji} + (1-\alpha) \times \max V_{ji}$	min W_{ji}
R_1	7	10	18	22	7	22	14,5	14,5
R_2	9	6	8	25	6	25	15,5	-
R_3	21	18	16	21	16	21	18,5	-
R_4	24	22	20	26	20	26	23	-

Следовательно, оптимальное решение согласно критерию Гурвица при α =0,5 заключается в выборе стратегии R_1.

Таким образом, далее лицу, принимающему решение, в примере предстоит сделать выбор, какое из возможных решений предпочтительнее: по критерию Лапласа — выбор стратегии R_2, по критерию Вальда — выбор стратегии R_3, по критерию Сэвиджа — выбор стратегии R_2, по критерию Гурвица при $\alpha = 0{,}5$ — выбор стратегии R_1.

51-62. Решить задачи, зная матрицу игры и вероятности состояний природы, используя критерии оптимальности Вальда, Гурвица, Сэвиджа, Лапласа и максимизации среднеожидаемого выигрыша (минимизации среднеожидаемого риска).

51.

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_1 = 0{,}2,\ p_2 = 0{,}4,\ p_3 = 0{,}1,\ p_4 = 0{,}3,\ \alpha = 0{,}5.$$

52.

$$V = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad p_1 = 0{,}5,\ p_2 = 0{,}2,\ p_3 = 0{,}2,\ p_4 = 0{,}1,\ \alpha = 0{,}5.$$

53.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_1 = 0{,}1,\ p_2 = 0{,}2,\ p_3 = 0{,}5,\ p_4 = 0{,}2,\ \alpha = 0{,}5.$$

54.

$$V = \begin{pmatrix} -20 & -19 & 14 \\ -12 & -10 & 6 \\ -8 & -14 & -6 \\ -3 & -17 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_1 = 0{,}08,\ p_2 = 0{,}83,\ p_3 = 0{,}09,\ \alpha = 0{,}6.$$

55.

$$V = \begin{pmatrix} -9 & 16 & -6 \\ 10 & -7 & 7 \\ 13 & 8 & -8 \\ -14 & -7 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_1 = 0{,}18,\ p_2 = 0{,}59,\ p_3 = 0{,}23,\ \alpha = 0{,}5.$$

56.

$$V = \begin{pmatrix} -1 & -15 & 14 \\ -9 & 10 & 19 \\ -1 & 15 & 13 \\ -20 & -15 & -15 \end{pmatrix}$$

$p_1 = 0{,}44$, $p_2 = 0{,}03$, $p_3 = 0{,}53$, $\alpha = 0{,}6$.

57.

$$V = \begin{pmatrix} -20 & 10 & 6 \\ 10 & 8 & 2 \\ -12 & 7 & 3 \\ 18 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

$p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}54$, $p_3 = 0{,}26$, $\alpha = 0{,}5$.

58.

$$V = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

$p_1 = 0{,}43$, $p_2 = 0{,}16$, $p_3 = 0{,}51$, $\alpha = 0{,}6$.

59.

$$P = \begin{pmatrix} 48 & 12 & 24 \\ 23 & 15 & 14 \\ 34 & 45 & 32 \end{pmatrix}$$

$p_1 = 0{,}23$, $p_2 = 0{,}58$, $p_3 = 0{,}19$, $\alpha = 0{,}4$.

60.

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 2 & -17 & 20 \\ 11 & 18 & -10 \end{pmatrix}$$

$p_1 = 0{,}17$, $p_2 = 0{,}68$, $p_3 = 0{,}15$, $\alpha = 0{,}3$.

61.

$$P = \begin{pmatrix} -10 & 8 & 11 \\ 13 & -4 & 17 \\ -5 & 12 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_1=0,34,\ p_2=0,19,\ p_3=0,47,\ \alpha=0,7.$$

62.

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 17 \\ -1 & 10 & 4 \end{pmatrix} \qquad p_1=0,19,\ p_2=0,25,\ p_3=0,56,\ \alpha=0,6.$$

63-69. Решить задачи, используя методологию теории игр.

63. Шесть экспертов оценивали по двадцатибалльной шкале степень риска проезда на 7 видах транспорта. Результаты оценивания представлены в таблице.

Вид транспорта	Эксперт					
Воздушный	1	2	3	4	5	6
Железнодорожный	9	5	10	7	9	8
Водный	5	5	6	7	5	4
Автомобильный	8	7	11	7	9	6
Мотоцикл	15	12	13	10	12	14
Велосипед	19	15	14	8	10	12
Метро	5	14	7	7	7	6

По данным этих оценок по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа и др. выявить самые безопасные виды транспорта. Для критерия Гурвица α =0,4.

64. Десять экспертов оценивали по десятибалльной шкале модели летних шин для автомобилей, учитывая тормозной путь, надежность управления автомобилем на прямой и на поворотах, поперечные сцепные свойства, цену и пр. Результаты оценки представлены в таблице.

По данным этих оценок по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица (α =0,6), Сэвиджа выбрать наиболее удачную модель.

Модели шин	Эксперт									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Barum Bravuris	9	9	8	9	8	8	7	7	6	9
Continental PC	9	8	8	10	10	10	10	9	8	9
Dunlop SP	8	8	7	6	6	6	9	8	8	5
Goodyear EV	9	9	10	10	10	9	7	8	10	8
Michelin Energy	9	7	6	9	8	7	9	9	10	7
Nokian NRH2	8	8	7	10	9	7	9	9	8	6
Pirelli P6	10	8	8	8	9	10	8	10	10	9

65. На Новый год в детский сад хотят поставить наборы подарков, производимых 5 фабриками. При выборе фабрики руководствуются экспертными оценками стоимости подарков, приведенными в таблице. С какой из фабрик следует заключить договор о поставке наборов подарков, обеспечивая минимальную их стоимость (α =0,5).

Фабрика	Эксперт					
	1	2	3	4	5	6
№ 1	20	25	18	15	21	16
№ 2	25	24	18	10	24	15
№ 3	15	28	20	12	19	18
№ 4	9	21	22	18	20	17
№ 5	18	26	20	20	15	22

66. Автомобильная компания рассматривает вопрос о поставке автомобилей на рынок. В зависимости от принятого решения (объема закупки автомобилей для последующей продажи) в квартал и от величины прогнозируемого спроса на автомобили составлена следующая таблица ежегодных финансовых результатов компании (доход, тыс. усл. ед.). Оценку проведите с использованием всех рассмотренных в разделе 5 критериев. При использовании критерия Гурвица сделайте расчёты для α =0,3; α =0,5; α =0,7.

Количество автомашин, продаваемых в квартал, шт.	Оценка прогнозируемой величины спроса					
	10	20	30	40	50	60
20	200	250	200	150	300	280
30	210	240	240	180	250	270
40	190	300	210	200	250	330
50	170	320	150	170	200	290
60	150	180	120	160	210	230

67. Определите, какой тип самолёта необходимо построить, чтобы удовлетворить потребность авиаперевозчиков. Множество возможных стратегий включает следующие параметры:

R_1 – самолет на 250 мест и с дальностью полёта 6000 км;

R_2 – самолет на 180 мест и с дальностью полёта 8000 км;

R_3 – самолет на 300 мест и с дальностью полёта 7000 км;

R_4 – самолет на 280 мест и с дальностью полёта 5500 км;

R_5 – самолет на 200 мест и с дальностью полёта 10000 км.

Экономическая эффективность строительства самолётов зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы

$S_1\left(i=\overline{1,5}\right)$.

Результаты расчёта экономической эффективности приведены в таблице. Для критерия Гурвица взять $\alpha = 0{,}45$.

Тип самолёта	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	30	60	30	20	45
R_2	40	50	40	40	40
R_3	60	80	45	45	30
R_4	50	70	60	25	50
R_5	70	40	50	30	60

68. Имеются четыре варианта (проекта) оснащения предприятия современным техническим оборудованием $R_i, i=\overline{1,4}$. Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого варианта (как некоторое состояние природы) в зависимости от рентабельности производства в четырех кварталах (см. таблицу):

Варианты оснащения	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	8	15	12	11
R_2	10	12	14	15
R_3	6	8	13	14
R_4	5	10	15	12

Требуется выбрать лучший проект по оснащению предприятия, используя критерии, приведенные в разделе 5, α = 0,7.

69. На конкурс выставлено пять проектов строительства административного здания районного города $R_i, i = \overline{1,5}$.Четырьмя рабочими группами проведена экспертиза этих проектов. Результаты представлены в таблице.

Варианты проекта	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	18	25	21	21
R_2	30	22	24	25
R_3	16	28	23	24
R_4	25	30	25	22
R_5	28	27	20	19

Требуется выбрать лучший проект, используя критерии, перечисленные в разделе 5.1.2, α = 0,5.