Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова»
(ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова»)

Кафедра математических методов в экономике

Практикум по дисциплине «Исследование операции и методы оптимизации»

Москва
ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова»
2016

Составитель канд. физ.-мат. наук К. В. Ш е в е л е в и ч

Рецензенты: канд. техн. наук А. Ф. Грибов (РЭУ им. Г. В. Плеханова); д-р техн. наук О. А. Косоруков (Высшая школа управления и инноваций МГУ им. М. В. Ломоносова)

Практикум по дисциплине «Исследование операции и методы оптимизации» / сост. К. В. Шевелевич. – Москва: ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2016. – 24 с.

Содержит материалы для практических занятий по дисциплине «Методы оптимизации». По каждой теме приведен краткий теоретический материал, алгоритм решения и задачи для самостоятельной работы.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. ЗАДАЧА БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ....................4
Тема 1. Оптимизация функций одной переменной..........................4
Тема 2. Оптимизация функций многих переменных 5
Раздел 2. ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ 7
Тема 1. Задача линейного программирования..................................7
1.1. *Графический метод решения задачи линейного программирования*..8
1.2. *Симплекс-метод*..9
1.3. *Двойственная задача* 13
1.4. *Метод искусственного базиса* 15
1.5. *Двойственный симплекс-метод*...17
Тема 2. Задача целочисленного линейного программирования 18
Тема 3. Задача нелинейного программирования............................19
3.1. *Графический метод решения задачи нелинейного программирования*..20
3.2. *Метод множителей Лагранжа* 21
Тема 4. Задача выпуклого программирования................................22
Список литературы 24

Раздел 1. ЗАДАЧА БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задачей безусловной оптимизации называется следующая оптимизационная задача:

$$f(x_1,\ldots,x_n)\to extr,$$

где $f\ X\to \boldsymbol{R}$, $X\subset \boldsymbol{R}^n$.

Тема 1. Оптимизация функций одной переменной

Рассмотрим задачу безусловной оптимизации для функции одной переменной

$$f(x)\to extr,$$

где $f : X\to \boldsymbol{R}$, $X\subset \boldsymbol{R}$.

Алгоритм решения:

1. Найти стационарные точки функции f. Для этого рассчитать первую производную f' и решить уравнение $f'(x)=0$.

2. Проверить стационарные точки на экстремум. Для этого рассчитать значение второй производной f'' в стационарной точке x^* и проверить его знак:

– если $f''(x^*) > 0$, то $x^*\in$ locmin f;

– если $f''(x^*) < 0$, то $x^*\in$ locmax f;

– если $f''(x^*) = 0$, то необходимо рассчитать последующие производные. Если первое ненулевое значение в стационарной точке дает нечетная производная, то экстремума в этой точке нет. Если первое ненулевое значение дает четная производная, то либо $f^{(2m)}(x^*) > 0$ и $x^*\in$ locmin f, либо $f^{(2m)}(x^*) < 0$ и $x^*\in$ locmax f.

3. Рассчитать значение функции f в найденных точках экстремума. Рассчитать значение функции в граничных и бесконечно удаленных точках области определения X. Сравнить все эти значения и сделать выводы о локальных и глобальных минимумах и максимумах функции f.

4. Записать ответ в виде: $f_{abs\min}=\ldots$, $f_{abs\max}=\ldots$, $f_{\text{locmin}}=\ldots$, $f_{\text{locmax}}=\ldots$ и указать точки, в которых экстремумы достигаются.

Задачи

Найти экстремумы функции одной переменной (1–13).

1. $f = x^2 + 4x + 6\to extr$.

2. $f = 2 + x - x^2\to extr$.

3. $f = x^3 - 3x^2 + 3x + 2\to extr$.

4. $f = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5\to extr$.

5. $f = (x - 1)^3\to extr$.

6. $f = (x - 1)^4\to extr$.

7. $f = x^2(x - 12)^2 \to extr.$

8. $f = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}} \to extr.$

9. $f = x - \ln(1+x) \to extr.$

10. $f = x*\ln(x) \to extr.$

11. $f = x*e^x \to extr.$

12. $f = x^3 \to extr,\ x \in [-1,3].$

13. $f = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \to extr,$ а) $x \in [-1,5]$; б) $x \in [-10,12]$.

14. Доказать неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$ для $x > 0$.

15. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

16. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Тема 2. Оптимизация функций многих переменных

Рассмотрим задачу безусловной оптимизации для функции многих переменных

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to extr,$$

где $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$.

Алгоритм решения:

1. Найти стационарные точки функции f. Для этого рассчитать первые частные производные функции f и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \\ \quad\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

2. Проверить стационарные точки на экстремум. Для этого:

а) рассчитать матрицу вторых производных для каждой стационарной точки

$$A = f''(x^*) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}\right|_{x=x^*}$$

б) рассчитать последовательные главные миноры $A_1, \ldots, A_n$, где $A_1 = det(a_{11}), \ldots, A_n = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Если все последовательные главные миноры положительны, т. е. $A_1 > 0, \ldots, A_n > 0$, то $x^* \in \mathrm{locmin}\, f$. Если все последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного, т. е. $A_1 < 0, A_2 > 0, \ldots$, то $x^* \in locmax\, f$. Если не выполняется ни одно из этих условий (достаточных условий экстремума), следует проверить необходимые условия второго порядка (п. 2, в);

в) рассчитать главные миноры $A_{i_1 \ldots i_k} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$, $k = 1, \ldots, n$. Если НЕ выполняется условие, что все главные миноры неотрицательны, т. е. $A_{i_1 \ldots i_k} \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$, то точка x^* НЕ является локальным минимумом. Если НЕ выполняется условие, что все главные миноры чередуют знак, начиная с «≤», то точка x^* НЕ является локальным максимумом.

3. Рассчитать значение функции f в найденных точках экстремума. Рассчитать значение функции в граничных и бесконечно удаленных точках области определения X. Сравнить все эти значения и сделать выводы о локальных и глобальных минимумах и максимумах функции f.

4. Записать ответ в виде: $f_{abs\min} = \ldots$, $f_{abs\max} = \ldots$, $f_{\mathrm{loc}\min} = \ldots$, $f_{\mathrm{loc}\max} = \ldots$ и указать точки, в которых экстремумы достигаются.

Задачи

Найти экстремумы функции многих переменных (1–8).

1. $f = (x - 1)^2 + 2y^2 \to extr.$

2. $f = (x - 1)^2 - 2y^2 \to extr.$

3. $f = x^2 + xy + y^2 - 2x - y \to extr.$

4. $f = x^{2-}y^2 - 4x + 6y \to extr.$

5. $f = 3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to extr.$

6. $f = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to extr.$

7. $f = 3xy - x^2y - xy^2 \to extr.$

8. $f = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \to extr.$

Раздел 2. ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задачей условной оптимизации называется следующая оптимизационная задача:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to extr,\ x \in D,$$

где f: $X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $D \subset X$. Множество D называется *областью допустимых решений*.

Тема 1. Задача линейного программирования

Общей задачей линейного программирования называется следующая задача условной оптимизации:

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \qquad \cdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{(k+1)1}x_1 + \cdots + a_{(k+1)n}x_n = b_{k+1}, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ldots,\ x_l \ge 0,$$

где F – целевая функция, коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$, $a_{11}, \ldots, a_{mn}$, $b_1, \ldots, b_m$ – заданные числа, $k \le m$, $l \le n$.

Стандартной задачей линейного программирования называется задача линейного программирования, в которой все ограничения являются неравенствами

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0.$$

Канонической задачей линейного программирования называется задача линейного программирования, в которой все ограничения являются равенствами

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0.$$

1.1. *Графический метод решения задачи линейного программирования*

Графический метод используется для решения задачи линейного программирования с двумя переменными вида

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \quad \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

где F – целевая функция, x_1, x_2 – неизвестные переменные. Коэффициенты целевой функции c_1, c_2, коэффициенты в системе ограничений a_{11}, ..., a_{m2}, $b_1, \ldots$, b_m – заданные числовые коэффициенты.

Алгоритм графического метода:

1. Построить область допустимых решений:

– построить прямые, уравнения которых получаются при замене в ограничениях знаков неравенств на знаки равенств

$$L_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$\ldots$$

$$L_m: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m;$$

– определить полуплоскости, определяемые каждым ограничением;

– найти пересечение этих полуплоскостей – это *область допустимых решений*.

2. Построить линию уровня целевой функции F:

– построить вектор с координатами $c = (c_1,\ c_2)$, где c_1, c_2 – коэффициенты целевой функции;

– построить прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору c – это *линия уровня* 0 *для целевой функции F*.

3. Передвигать построенную линию уровня в направлении вектора c и:

– либо найти точку из области допустимых решений, через которую проходит линия наивысшего уровня;

– либо установить, что целевая функция не ограничена сверху.

4. Найти координаты полученной точки (x_1^*, x_2^*) и максимальное значение целевой функции $F_{\max}$.

Задачи

Решить задачу графическим способом:

1. $F = 30x_1 + 40x_2 \to max$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

2. $F = x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

3. $F = x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

4. $F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

5. $F = 2x_1 - x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

1.2. *Симплекс-метод*

Симплексный метод решения задачи линейного программирования заключается в последовательном переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции не убывает.

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования, для которой первый опорный план можно непосредственно записать как

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,$$

где $m \le n$, $b_1 > 0$, ..., $b_m > 0$.

Алгоритм симплекс-метода:

1. Привести задачу к каноническому виду. Для этого в каждое неравенство добавить дополнительные переменные, чтобы превратить неравенства в равенства

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \quad\quad\quad\quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

2. Записать ограничения в векторном виде

$$x_1P_1 + \ldots + x_nP_n + x_{n+1}P_{n+1} + \ldots + x_{n+m}P_{n+m} = P_0,$$

где $P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, ..., $P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ...,

$$P_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Заполнить первую симплекс-таблицу:

Базис	$C_б$	P_0	c_1	...	c_n	c_{n+1}	...	c_{n+m}
			P_1	...	P_n	P_{n+1}	...	P_{n+m}
P_{n+1}	c_{n+1}	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_{n+m}	c_{n+m}	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1
||||||||||	||||||||||	F_0	Δ_1	...	Δ_n	Δ_{n+1}	...	Δ_{n+m}

а) в строке над векторами P_1, ..., P_{n+m} записываются коэффициенты целевой функции при соответствующих переменных x_1, ..., x_{n+m} (c_1, ..., c_n, $c_{n+1} = 0$, ..., $c_{n+m} = 0$);

б) в столбце «Базис» записываются базисные векторы (P_{n+1}, ..., P_{n+m});

в) в столбце «$C_б$» записываются коэффициенты целевой функции при базисных переменных ($c_{n+1} = 0$, ..., $c_{n+m} = 0$);

г) в столбцах «P_0», «P_1», ..., «P_{n+m}» записываются соответствующие векторы; *в столбце P_0 находится опорный план;*

д) в последней строке рассчитываются значения F_0, Δ_1, ..., Δ_{n+m}. F_0 – это *значение целевой функции* на опорном плане, т. е. $F_0 = c_{n+1}b_1 + \ldots + c_{n+m}b_m$ ($F_0 = 0$). Значения Δ_j рассчитываются по формуле $\Delta_j = c_{n+1}a_{1j} + \ldots + c_{n+m}a_{mj} - c_j$ ($\Delta_1 = -c_1$, ..., $\Delta_n = -c_n$, $\Delta_{n+1} = 0$, ..., $\Delta_{n+m} = 0$).

4. Выяснить, имеется ли хотя бы одно отрицательное Δ_j. Если нет, т. е. все $\Delta_j \ge 0$, то найденный опорный план оптимален.

Если да, то:

– либо существует такое $\Delta_j < 0$, что все $a_{ij} \leq 0$, тогда целевая функция не ограничена сверху;

– либо для каждого отрицательного $\Delta_j < 0$ существует хотя бы одно положительное $a_{ij} > 0$, тогда можно перейти к новому опорному плану и значение целевой функции увеличится.

5. Найти направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по модулю отрицательным $\Delta_j < 0$. Направляющая строка определяется минимальным из отношений элементов столбца «P_0» к *положительным* компонентам направляющего столбца. Число, стоящее на пересечении направляющего столбца и направляющей строки, называется разрешающим элементом.

6. Заполнить новую симплекс-таблицу:

а) в столбце «Базис» вместо вектора направляющей строки записываем вектор направляющего столбца, остальные векторы базиса остаются неизменными;

б) в столбце «$C_б$» записываем соответствующие коэффициенты целевой функции;

в) в столбцы «P_j», соответствующие новому базису, записываем единичные векторы («1» ставится на пересечении одноименных строки и столбца, а все остальные «0»);

г) заполняем строку с номером направляющей строки по формуле

$b_i' = \frac{b_i}{a_{rk}}$, $a_{ij}' = \frac{a_{ij}}{a_{rk}}$, где a_{rk} – разрешающий элемент (т. е. делим старое значение на разрешающий элемент);

д) заполняем все остальные строки по формулам

$b_i' = b_i - \frac{b_r \cdot a_{ik}}{a_{rk}}, a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}$, (т. е. из старого значения вычитаем произведение проекций на направляющий столбец и направляющую строку, деленное на разрешающий элемент). Значения F_0 и Δ_j рассчитываются по прежним формулам (см. 3, д).

7. Перейти к пункту 4.

Задачи

Решить задачу симплекс-методом.

1. $F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to max$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

2. $F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$

3. $F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$

4. $F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$

1.3. *Двойственная задача*

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу линейного программирования, называемую *двойственной*.

Двойственная задача составляется по следующим правилам:

1. Если исходная (прямая) задача на максимум, то двойственная – на минимум.
2. Число переменных одной задачи из пары двойственных задач равно числу ограничений другой задачи.
3. Коэффициенты целевой функции одной задачи являются правыми частями ограничений другой задачи.
4. Матрица коэффициентов системы ограничений одной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов другой задачи.
5. Если в прямой задаче i-е ограничение является неравенством вида «≤», то соответствующая переменная двойственной задачи неотрицательна: $y_i \geq 0$. Если i-е ограничение является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи y_i может принимать любые значения.
6. Если j-я переменная прямой задачи неотрицательна: $x_j \geq 0$, то соответствующее j-е ограничение двойственной задачи является неравенством вида «≥». Если j-я переменная прямой задачи x_j может принимать любые значения, то соответствующее j-е ограничение двойственной задачи является равенством.

Согласно этим правилам пара двойственных задач выглядит следующим образом:

Прямая задача

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \quad\quad \cdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{(k+1)1}x_1 + \cdots + a_{(k+1)n}x_n = b_{k+1}, \\ \quad\quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ldots,\ x_l \ge 0.$$

Двойственная задача

$$F^* = b_1y_1 + \ldots + b_my_m \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ \quad\quad \cdots \\ a_{1l}y_1 + \cdots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\ a_{1(l+1)}y_1 + \cdots + a_{m(l+1)}y_m = c_{l+1}, \\ \quad\quad \cdots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{1m}y_m = c_n, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ \ldots,\ y_k \ge 0.$$

Задачи

Составить двойственную задачу (1–2).

1. $F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

2. $F = 4x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 11, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0.$

Составить двойственную задачу и решить обе задачи графическим методом (3–4).

3. $F = 2x_1 + 7x_2 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

4. $F = 4x_1 + 6x_2 \to max$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le -2, \\ 2x_1 + x_2 \le -3, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

Составить двойственную задачу и найти ее решение из последней симплекс-таблицы прямой задачи (5–7).

5. $F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to max$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

6. $F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5 \to max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_6 \ge 0.$

7. $F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_5 \ge 0.$

1.4. *Метод искусственного базиса*

Метод искусственного базиса применяется для канонической задачи линейного программирования

$$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \dots,\ x_n \ge 0,$$

для которой среди векторов $P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, …, $P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ нет m единичных векторов.

Алгоритм метода искусственного базиса:

1. Составить расширенную задачу:

$$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \dots - Mx_{n+m} \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \quad\quad\quad\quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ \dots,\ x_{n+m} \geq 0,$$

где M – достаточно большое произвольное число, конкретное значение которого обычно не указывается.

2. Найти опорный план расширенной задачи.

3. Исключить искусственные переменные из базиса. Для этого обычный симплекс-метод ведется по дополнительной строке (с M) до тех пор, пока все искусственные векторы не будут исключены из базиса и таким образом находится опорный план исходной задачи, или не все искусственные векторы исключены из базиса и тогда:

– если компонента опорного плана в строке с M отрицательна, то исходная задача не имеет решения;

– если компонента опорного плана в строке с M равна нулю, то найденный опорный план является вырожденным и базис содержит по крайней мере один из векторов искусственного базиса.

4. Используя найденный опорный план исходной задачи, ее решают обычным симплекс-методом.

Задачи

Решить задачу методом искусственного базиса.

1. $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10, \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

2. $F = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 36, \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

3. $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

4. $F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$

1.5. *Двойственный симплекс-метод*

Двойственный симплекс-метод применяется для стандартной задачи линейного программирования, правые части ограничений которой могут быть любыми, даже отрицательными числами (в обычном симплекс-методе они предполагались положительными):

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0,$$

где $b_1, \ \ldots, \ b_m$ – любые числа.

Алгоритм двойственного симплекс-метода:

1. Найти псевдоплан задачи. Для этого решают задачу обычным симплекс-методом, не обращая внимание на отрицательные компоненты опорного плана.

2. Проверить псевдоплан на оптимальность. Если все компоненты опорного плана положительны, то псевдоплан оптимален. Если псевдоплан не оптимален, то:

– либо устанавливают неразрешимость (в какой-то строке, соответствующей отрицательной компоненте псевдоплана, все $a_{ij} \geq 0$);

– либо переходят к новому псевдоплану (это возможно, если для всех отрицательных компонент псевдоплана существуют отрицательные элементы этой строки $a_{ij} < 0$).

3. Выбрать направляющую строку по наибольшей по модулю отрицательной компоненте псевдоплана. Направляющий столбец определяется минимумом из отношений $-\frac{\Delta_j}{a_{ij}}$ для отрицательных $a_{ij} < 0$.

4. Пересчитать новую симплекс-таблицу по обычным правилам симплекс-метода.

5. Найти новый псевдоплан. Перейти к п. 2.

Задачи

Решить задачу двойственным симплекс-методом.

1. $F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

2. $F = 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 5x_4 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$

3. $F = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 18, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$

4. $F = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 24, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \geq 12, \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$

Тема 2. Задача целочисленного линейного программирования

Задачей целочисленного линейного программирования называется задача линейного программирования, переменные которой принимают целочисленные значения

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \qquad \cdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ a_{(k+1)1}x_1 + \cdots + a_{(k+1)n}x_n = b_{k+1}, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0,$$

$$x_1, \ \ldots, \ x_n \in Z.$$

Метод Гомори

Метод Гомори позволяет найти решение задачи целочисленного линейного программирования.

Алгоритм метода Гомори:

1. Найти решение задачи обычным симплекс-методом.
2. Если решение целочисленное, то задача решена. Если решение содержит дробные числа, то переходят к п. 3.
3. Составить новую задачу, система ограничений которой включает дополнительное ограничение. Это ограничение записывается для компоненты оптимального плана с максимальной дробной частью. Пусть это компонента x_j^*. Из последней симплекс-таблицы исходной задачи берется строка соответствующего базисного вектора P_j и записывается неравенство $\{a_{i1}^*\}x_1 + \ldots + \{a_{in}^*\}x_n \geq \{b_i^*\}$, где $\{\ldots\}$ – это дробная часть числа.
4. Решить составленную задачу обычным симплекс-методом, перейти к п. 2.

Итерационный процесс продолжают до получения оптимального плана с целочисленными компонентами или до установления неразрешимости задачи.

Задачи

Решить задачу методом Гомори.

1. $F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_5 \geq 0,$

$x_1, \ldots, x_5 \in Z.$

2. $F = x_1 + 4x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6\ {}^1/_3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0,$

$x_1, x_2 \in Z.$

Тема 3. Задача нелинейного программирования

Задачей нелинейного программирования называется следующая задача условной оптимизации:

$$F = f(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow max$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) \le b_1, \\ \qquad \dots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) \le b_k, \\ g_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = b_{k+1}, \\ \qquad \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m, \end{cases}$$

где f, $g_1, \dots, g_m$ – заданные функции, $b_1, \dots, b_m$ – заданные числа, $k \le m$.

3.1. Графический метод решения задачи нелинейного программирования

Графический метод используется для решения задачи нелинейного программирования с двумя переменными вида

$$F = f(x_1, x_2) \to max$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) \le b_1, \\ \qquad \dots \\ g_m(x_1, x_2) \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Алгоритм графического метода:

1. Построить область допустимых решений:

– построить кривые, уравнения которых получаются при замене в ограничениях знаков неравенств на знаки равенств

$$L_1\colon g_1(x_1, x_2) = b_1,$$

$$\dots$$

$$L_m\colon g_m(x_1, x_2) = b_m;$$

– найти полуплоскости, определяемые каждым ограничением;

– найти пересечение этих полуплоскостей – это *область допустимых решений*.

2. Построить линию уровня целевой функции F – множество точек, удовлетворяющих уравнению $f(x_1, x_2) = h$, где h – это некоторая константа.

3. Найти точку пересечения области допустимых решений с линией наивысшего уровня.

4. Найти координаты полученной точки (x_1^*, x_2^*) и максимальное значение целевой функции $F_{\max}$.

Задачи

Решить задачу графическим методом.

1. $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

2. $F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

3. $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

4. $F = 3x_1 + 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ x_1 x_2 \geq 4, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

3.2. Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа применяется для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа равенств

$$F = f(x_1, \dots, x_n) \to max$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1, \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m. \end{cases}$$

Алгоритм метода множителей Лагранжа:

1. Составить функцию Лагранжа

$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1[b_1 - g_1(x_1, \dots, x_n)] + \dots + \lambda_m[b_m - g_m(x_1, \dots, x_n)]$.

2. Найти стационарные точки функции Лагранжа L. Для этого рассчитать первые частные производные функции L и решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ \quad\dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \quad\dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0. \end{cases}$$

3. Проверить стационарные точки на экстремум.

Задачи

Решить задачу методом множителей Лагранжа.

1. $F = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to max$

$x_1+x_2=180.$

2. $F = x_1^2 + x_2^2 \to max$

$x_1 + x_2=5.$

3. $F = x_1x_2 + x_2x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

4. $F = x_1x_2x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8. \end{cases}$$

Тема 4. Задача выпуклого программирования

Задачей выпуклого программирования называется задача условной оптимизации

$$F = f(x_1,\dots, x_n) \to max$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) \le b_1, \\ \qquad\dots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) \le b_k, \\ g_{k+1}(x_1, \dots, x_n) = b_{k+1}, \\ \qquad\dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m, \end{cases}$$

где f, g_1, …, g_m – заданные функции, причем функция f – вогнутая, а функции g_1, …, g_m – выпуклые, b_1, …, b_m – заданные числа, $k \le m$.

Алгоритм решения:

1. Составить функцию Лагранжа

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda_1[b_1 - g_1(x_1,\dots,x_n)] + \dots + \lambda_m[b_m - $$
$$- g_m(x_1,\dots,x_n)].$$

2. Выписать необходимые условия экстремума для функции Лагранжа L:

а) условие стационарности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ \quad\dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \quad\dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0, \end{cases}$$

б) условие дополняющей нежесткости (только для неравенств)

$$\begin{cases} \lambda_1[b_1 - g_1(x_1,\dots,x_n)] = 0, \\ \qquad\qquad\dots \\ \lambda_k[b_k - g_k(x_1,\dots,x_n)] = 0, \end{cases}$$

в) условие неотрицательности (только для неравенств)

$\lambda_1,\dots,\lambda_m \geq 0$.

3. Решить систему и найти точки, подозрительные на экстремум.

4. Проверить найденные точки на экстремум.

Задачи

Решить задачу выпуклого программирования.

1. $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1/2. \end{cases}$$

2. $F = x_1x_2x_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1, \\ x_3 \geq 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М. : Высшая школа, 1986.
2. *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи : учебное пособие. – М. : Физматлит, 2008.
3. *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М. : Эдиториал УРСС, 2000.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов : учебное пособие / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Астрель: АСТ, 2008.
5. *Сагитов Р. В., Шершнев В. Г.* Линейная алгебра : учебно-методическое пособие. – М. : Менеджер, 2007.

ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Составитель ШЕВЕЛЕВИЧ Кристина Войтеховна

Редактор *Л. Г. Итберг*
Оформление обложки *Ю. С. Жигалова*

Подписано в печать 11.05.2016. Формат 60х834 1/16.
Уч.-изд. л. 1,28. Усл. печ. л. 1,5. Тираж 50 экз. Заказ

ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова».
117997, Москва, Стремянный пер., 36.
Напечатано в типографии ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова».
117997, Москва, Стремянный пер., 36.