Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»

Факультет математической экономики, статистики и информатики

Кафедра математических методов в экономике

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по теме «Модели управления запасами» по дисциплине «Моделирование макроэкономики»

Направление подготовки ***38.03.01 Экономика***
Профиль программы ***Математические методы в экономике***
Уровень высшего образования ***Бакалавриат***
Программа подготовки ***Академический бакалавриат***

Москва – 2016 г.

План лекции

1. Основные понятия и общая постановка задачи
2. Статическая детерминированная модель без дефицита
3. Модель производственных запасов
4. Статическая детерминированная модель с дефицитом
5. Стохастические модели управления запасами

Основные понятия и общая постановка задачи

Задачи управления запасами составляют один из наиболее многочисленных классов экономических задач, решение которых имеет важное народнохозяйственное значение. Правильное и своевременное определение оптимальной стратегии управления запасами, а также нормативного уровня запасов позволяет высвободить значительные оборотные средства, замороженные в виде запасов, что, в конечном счете, повышает эффективность используемых ресурсов.

Основные характеристики моделей управления запасами.

Предприятия, фирмы имеют различные запасы: сырье, комплектующие изделия, готовую продукцию, предназначенную для продажи, и т. д. Совокупность подобных материалов, представляющих временно не используемые экономические ресурсы, называют *запасами предприятия.*

Спрос. Спрос на запасаемый продукт может быть *детерминированным* (в простейшем случае — постоянным во времени) или *случайным* (случаен момент спроса, либо объем спроса и др.).

Пополнение склада. Пополнение склада может осуществляться либо периодически через определенные интервалы времени, либо по мере снижения запасов до некоторого уровня.

Объем заказа. При периодическом пополнении и случайном исчерпании запасов объем заказа может зависеть от того состояния, которое наблюдается в момент подачи заказа. Заказ обычно подается на одну и ту же величину при достижении запасом заданного уровня — так называемой *точки заказа.*

Количество товара, поставляемое на склад, называют *размером партии.*

Время доставки в идеализированных моделях управления запасами предполагается, что заказанное пополнение доставляется на склад мгновенно. В других моделях рассматривается задержка поставок на фиксированный или случайный интервал времени.

Издержки. Различают *организационные издержки* — расходы, связанные с оформлением и доставкой товаров; издержки *содержания запасов* — затраты, связанные с хранением (возникают из-за амортизации в процессе хранения: изделия могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т. д.), издержки, связанные с *дефицитом* (*штрафом за дефицит*), если поставка со склада не может быть выполнена, то возникают дополнительные издержки, связанные с отказом.

В большинстве моделей управления запасами считают объем склада практически неограниченным, а в качестве контролирующей величины служит объем хранимых запасов. При этом полагают, что за хранение каждой единицы запаса в единицу времени взимается определенная плата.

Номенклатура запаса. В простейших случаях предполагается, что на складе хранится запас однотипных изделий или однородного продукта. В более сложных случаях рассматривается *многономенклатурный запас.*

Структура складской системы. Наиболее полно разработаны математические модели одиночного склада. Однако на практике встречаются и более сложные структуры: иерархические системы складов с различными периодами пополнения и временем доставки заказов, с возможностью обмена запасами между складами одного уровня иерархии и т. п.

В качестве критерия эффективности принятой стратегии управления запасами выступает *функция затрат* (*издержек*), представляющая суммарные затраты на хранение и поставку запасаемого продукта (в том числе потери от порчи продукта при хранении и его морального старения, потери прибыли от омертвления капитала и т. п.) и затраты на штрафы. *Управление запасами состоит в отыскании такой стратегии пополнения и расхода запасами, при котором функция затрат принимает минимальное значение.*

Пусть функции $A(t)$, $B(t)$ и $R(t)$ выражают соответственно пополнение запасов, их расход и спрос на запасаемый продукт за промежуток времени $[0,t]$. В моделях управления запасами обычно используются производные этих функций по времени $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$, называемые соответственно *интенсивностями пополнения, расхода и спроса.*

Если функции $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$ — не случайные величины, то модель управления запасами считается *детерминированной*, если хотя бы одна из них носит случайный характер — *стохастической.* Если все параметры модели не меняются во времени, она называется *статической*, в противном случае — *динамической*. Статические модели используются, когда принимается разовое решение об уровне запасов на определенный период, а динамические — в случае принятия последовательных решений об уровнях запаса или корректировке ранее принятых решений с учетом происходящих изменений.

Уровень запаса в момент t определяется основным уравнением запасов

$J(t) = J_0 + A(t) - B(t)$

где J_0 — начальный запас в момент $t = 0$.

Данное уравнение чаще используется в интегральной форме:

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)dt - \int_0^t b(t)dt$$

Пример 1. Интенсивность поступления готовых автомашин на склад готовой продукции составляет в начале дневной смены три машины/мин, в течение первого часа линейно возрастает, достигая к концу его шесть машин/мин, и затем остается постоянной. Полагая, что поступление автомашин на склад происходит непрерывно в течение восьми часов смены, а вывоз автомашин со склада производится только в конце работы, записать выражение для уровня запаса в произвольный момент времени и, используя его, найти количество автомашин на складе: а) через 30 мин после начала работы; б) в конце смены.

Решение.

Так как в течение смены не происходит выезда автомашин со склада, $b(t)$ =0. Интенсивность пополнения запаса в течение первого часа линейно возрастает, т. е. $a(t) = kt + b$. Учитывая, что $a(0)$ =3, получаем b =3. В конце часа (t =60): $a(60)$ =6, следовательно, 6 =60k + 3, откуда k =0,05. Таким образом, для первого часа смены $a(t)$ =0,05t + 3 , а затем $a(t)$ =6.

Учитывая продолжительность смены (8 ч =480 мин), получаем, если $0 \le t \le 60$:

$$J(t) = \int_0^t (0{,}05t + 3)dt = 0.025t^2 + 3t$$

и если $60 \le t \le 480$:

$$J(t) = \int_0^{60} (0{,}05t + 3)dt + \int_{60}^{t} 6dt = (0{,}025t^2 + 3t)\Big|_0^{60} + (6t)\Big|_{60}^{t}$$

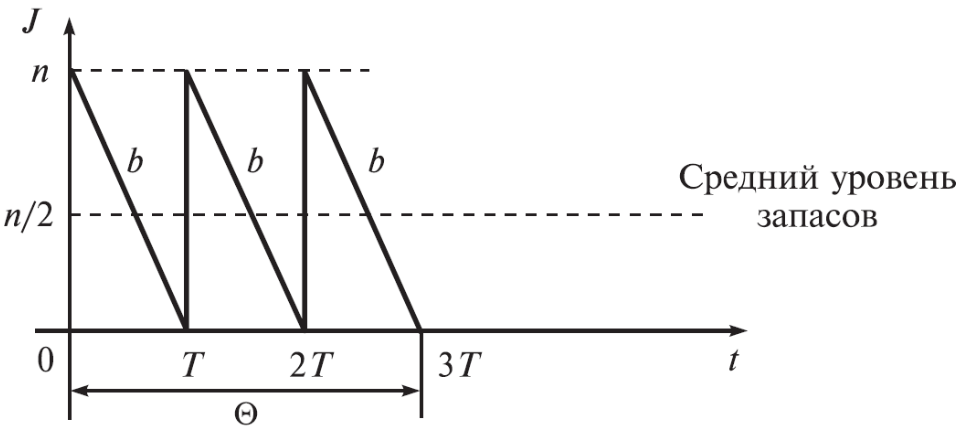
$$= 270 + 6t - 360 = 6t - 90$$

Количество автомашин на складе через 30 мин после начала работы будет: J(30) =900 ·0,025 + 3 ·30 =112,5 ≈112, а в конце смены:

J(480) = 6 ·480-90=2790.

Статическая детерминированная модель без дефицита

Рассмотрим простейшую модель, в которой дефицит не допускается, т. е. осуществляется полное удовлетворение спроса на запасаемый продукт, при этом уровень запаса мгновенно пополняется до начального значения за счет поступления партии заказа. Уровень запаса в начальный момент равен объему партии $J(0)=n$. Процесс изменения повторяется на каждом временном интервале продолжительностью T (рисунок).



Тем самым выполняется совпадение функций $r(t)$ и $b(t)$, и расходование запаса происходит непрерывно с постоянной интенсивностью: $b(t)$ =b, а общее потребление запасаемого продукта за рассматриваемый интервал времени θ равно N. Интенсивность b можно определить по формуле: $b=N/\theta$.

Введем обозначения необходимых для составления модели величин (таблица).

Величина	Обозначение	Единицы обозначения	Предположения
Интенсивность спроса	r	Единиц товара в год	Спрос непрерывен и постоянен; весь спрос удовлетворяется
Организационные издержки	c_1	рублей за партию	Издержки постоянны, независимо от размера партии
Стоимость товара	s	рублей за единицу товара	Цена единицы товара постоянна, рассматривается один вид товара
Издержки содержания запасов	c_2	рублей за единицу товара в единицу времени	Стоимость хранения единицы товара в единицу времени постоянна
Размер партии	n	Единиц товара в партии	Размер партии постоянен; поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса будет равен нулю

Пополнение заказа происходит партиями одинакового объема, т. е. функция $a(t)$ не является непрерывной: $a(t)=0$ при всех t, кроме моментов поставки продукта, т. е. $a(t)=n$, где n — объем партии.

Так как интенсивность расхода равна b, вся партия будет использована за время T:

$T=n/b$

На временном интервале $[0, T]$ уровень запаса уменьшается по прямой $J(t)=n-bt$ от значения n до нуля.

Описанную модель называют также основной моделью управления запасами.

Задача управления запасами состоит в определении такого объема партии n, *при котором суммарные затраты на создание и хранение запаса были бы минимальными.*

Обозначим суммарные затраты через C, затраты на создание запаса — через C_1, затраты на хранение запаса — через C_2 и найдем эти величины за весь промежуток времени T.

Так как за время θ необходимо запастись N единицами продукта, который доставляется партиями объема n, число таких партий k равно

$k=N/n=\theta/T$

Откуда получаем

$C_1=c_1k=c_1N/n$

Мгновенные затраты хранения запаса в момент времени t равны $c_2J(t)$. За промежуток времени $[0,T]$ они составят с учетом:

$$c_2\int_0^T J(t)dt = c_2\int_0^T (n-bt)dt = c_2\int_0^T (n-n/T)dt = -c_2(nt-\frac{nt^2}{2T})\Big|_0^T$$
$$= c_2nT/2$$

Средний запас за промежуток [0, T] равен $nT/2$, т. е. затраты на хранение всего запаса при линейном (по времени) его расходе равны затратам на хранение среднего запаса.

Затраты хранения запаса за промежуток времени с учетом $k=N/n=\theta/T$ равны

$C_2=c_2nT/2*k= c_2nT/2*N/n= c_2NT/2= c_2n\theta/2$

Затраты C_1 обратно пропорциональны, а затраты C_2 прямо пропорциональны объему партии n. Суммарные затраты будут равны:

$\boldsymbol{C= c_1N/n+ c_2n\theta/2}$

Для нахождения минимума C найдем производную dC/dn и приравняем ее к нулю:

$dC/dn= -c_1N/n^2+ c_2\theta/2=0$

откуда с учетом $b=N/\theta$:

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}} = \sqrt{\frac{2c_1b}{c_2}}$$

Формула выше называется *формулой Уилсона*, или *формулой наиболее экономичного объема партии*.

Число оптимальных партий (k_o) за время θ с учетом выведенной формулы и время расхода (T_o) оптимальной партии равно:

$$k_0 = \frac{N}{n_0} = \sqrt{\frac{c_2N\theta}{2c_1}} = \theta\sqrt{\frac{c_2b}{2c_1}}$$

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = n_0 * \frac{\theta}{N} = \sqrt{\frac{2c_1\theta}{c_2N}} = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2b}}$$

Пример 2. Интенсивность равномерного спроса на холодильники «Ока» в магазине составляет 200 шт. в год. Организационные издержки для одной партии составляют 40 тыс. руб. Цена одного холодильника равна 10 тыс. руб., а издержки содержания холодильника на складе составляют 0,2 тыс. руб. за один холодильник в год.

Найти оптимальный размер партии, число поставок и продолжительность цикла.

Решение.

По условию задачи r =200, c_1 =40, s =10, c_2 =0,2.

Общие издержки в течение года:

C =200 ·40/n + 0,2 ·n/2 =8000/n + n/10;

$dC/dn = -8000/n^2 + 1/10 = 0$;

$n_0 = \sqrt{80\,000} = 282{,}84 \approx 283$шт.;

$k_0 = 200/n_0 = 200/283 \approx 0{,}71$;

$T_0 = 365/k_0 = 365/0{,}71 \approx 516$ дн.

Ответ. Оптимальный размер партии холодильников составляет 283 шт., число поставок — 0,71, интервал между поставками — 516 дней.

Пример 3. Предприятию необходимо для производства своей продукции 4000 деталей в год, которые расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Перед новым годом детали заказываются и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 50 коп. в сутки, а поставка партии — 500 руб. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима. Определить наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, которые нужно указать в заказе.

Решение.

По условию задачи: затраты на одну партию составляют $c_1 = 500$ руб., затраты на хранение единицы запаса в сутки $c_2 = 50$ коп.

Общий промежуток времени θ=1 год=365 дней, а общий объем запаса за этот период $N = 4000$ деталей. По формуле:

$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}} = \sqrt{\frac{2*500*4000}{0.5*365}} = \sqrt{21918} \approx 148$ деталей, а:

$T_0 = n_0 * \frac{\theta}{N} = 148 * 365/4000 \approx 13$ дней.

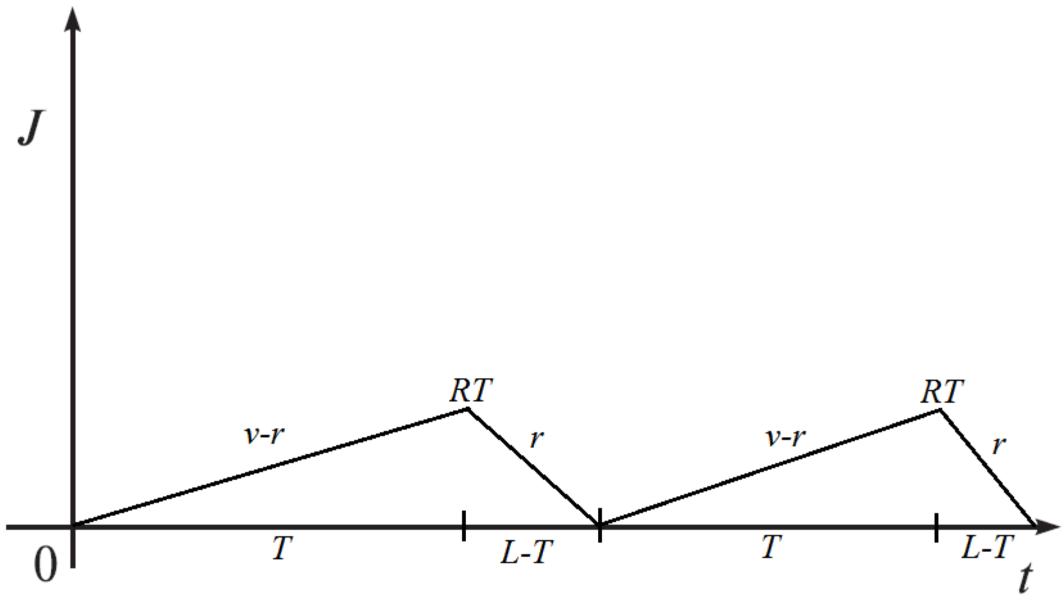
Наиболее экономичный объем партии составляет 148 деталей, а интервал между поставками — 13 дней.

Модель производственных запасов

В основной модели управления запасами предполагалось, что поступление товаров на склад происходит мгновенно, например, в течение одного дня. Рассмотрим случай, когда товары поступают на склад непрерывно и непосредственно с производства. Это — модель *производственных поставок.* Обозначим через v интенсивность поступления на склад товара, которая равна количеству товаров, выпускаемых производством, в определенный промежуток времени.

Определим оптимальный размер партии, минимизирующий общие затраты.

График изменения модели производственных запасов представлен на рисунке.



Общие издержки рассчитываются по такой же формуле, как и для основной модели.

Для получения среднего уровня запасов следует учесть, что $RT=(v-r)T$ — максимальный уровень запасов; $n=vT$ — количество товаров в одной производственной поставке. Можно записать следующее равенство $T=n/v$

Тогда средний уровень запасов составляет половину максимального и равен $(v-r)n/2v$, а C рассчитывается по формуле

$C=c_1r/n+c_2(v-r)n/2v$

Решая уравнение $dC/dn=0$, найдем оптимальный размер партии модели производственных поставок:

$$n_0=\sqrt{\frac{2vc_1r}{c_2(v-r)}}$$

Пример 4. Интенсивность равномерного спроса выпускаемых фирмой кофемолок составляет 300 шт. в год. Организационные издержки на запуск сборочной линии равны 200 руб. Цена кофемолки составляет 150 руб., издержки хранения одной кофемолки на складе равны 100 руб. в год. Запасы на складе пополняются со скоростью 400 кофемолок в год. Производственная линия начинает действовать, как только уровень запасов на складе становится равным нулю, и продолжает работу до тех пор, пока не будет произведено n кофемолок.

Найти размер партии, который минимизирует все затраты. Определить число поставок в течение года, время, на протяжении которого продолжается поставка, продолжительность цикла, максимальный уровень запасов и средний уровень запасов при условии, что размер поставки оптимален.

Решение.

Данная модель задачи является моделью производственных поставок и имеет следующие параметры:

$r=300$, $c_1=200$, $c_2=100$, $s=150$, $v=400$.

Число партий в течение года:

$k = r/n = 300/n$.

Продолжительность цикла:

$L = 365/k$.

Максимальный уровень запасов:

$RT = (v - r)T = 100 \cdot n/400 = n/4$.

Средний уровень запасов:

$RT/2 = n/8$.

Уравнение издержек:

$C = C_1 + C_2 + C_3 = c_1 k + sr + nc_2/8 = c_1\, 300/n + 150 \cdot 300 + n \cdot c_2/8$.

Решив уравнение $dC/dn = 0$, получим

$n_0 = \sqrt{\frac{2*400*200*300}{100(400-300)}} = 69$ кофемолок.

Найдем оптимальные значения числа поставок:

$k_0 = r/n_0 = 300/69 \approx 4{,}35$.

Продолжительность полного цикла:

$L_0 = 365/k_0 = 365/4{,}35 \approx 84$.

Продолжительность производственного цикла:

$T_0 = n/v = 69/400*365 \approx 63$

Максимальный уровень запасов:

$RT_0 = (v - r)\, T = n/4 = 69/4 \approx 17{,}3$.

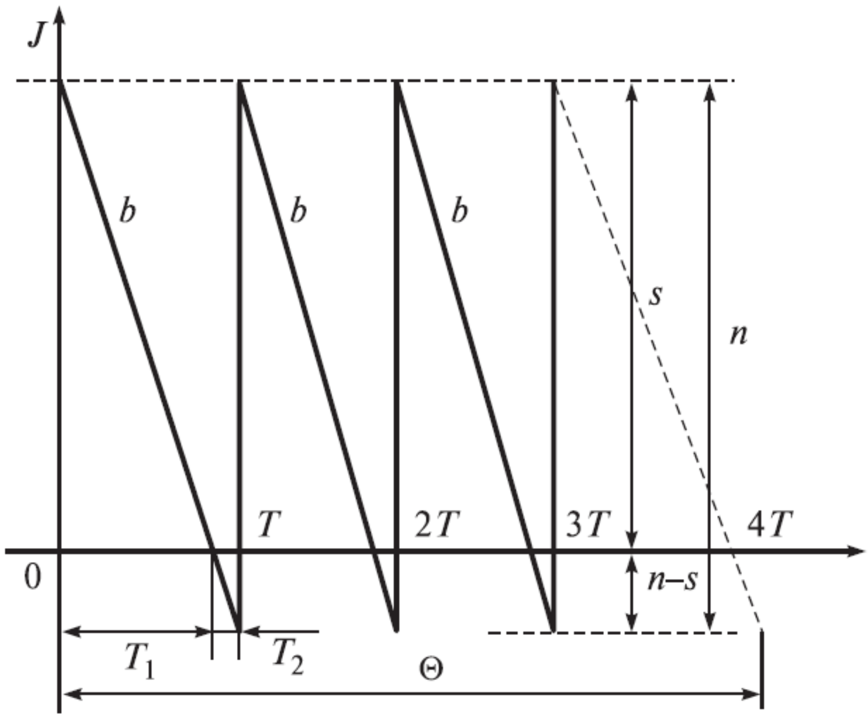
Средний уровень запасов:

$RT_0/2 = n/8 = 8{,}6$.

Ответ. За каждую поставку необходимо доставлять на склад 69 кофемолок, оптимальное число поставок (партий) составляет 4,35 шт., продолжительность цикла между двумя запусками линии — 84 дня.

Статическая детерминированная модель с дефицитом

В рассматриваемой модели предполагается наличие *дефицита.* Это означает, что при отсутствии запасаемого продукта, т. е. при $J(t) = 0$, спрос сохраняется с той же интенсивностью $r(t) = b$, но потребление запаса отсутствует $b(t) = 0$, вследствие чего накапливается дефицит со скоростью b. График изменения уровня запаса в этом случае представлен на рисунке.



Убывание графика ниже оси абсцисс в область отрицательных значений в отличие от графика основной модели управления запасами характеризует накопление дефицита.

Из рисунка видно, что каждый период $T = n/b$ разбивается на два временных интервала T_1 и T_2, т. е. $T = T_1 + T_2$, где T_1 — время, в течение которого производится потребление запаса, T_2 — время, когда запас отсутствует и накапливается дефицит, который будет перекрыт в момент поступления следующей партии.

Необходимость покрытия дефицита приводит к тому, что максимальный уровень запаса s в момент поступления каждой партии теперь не равен ее объему n, а меньше его на величину дефицита $n - s$, накопившегося за время T_2. Легко установить, что

$T_1 = s/n*T$, $T_2 = (n-s)/n*T$

В данной модели в функцию суммарных затрат C наряду с за тратами C_1 (на пополнение запаса) и C_2 (на хранение запаса) необходимо ввести затраты C_3 (на штраф из-за дефицита), т. е. $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Затраты C_1, как и ранее, находим по формуле $C_1 = c_1 k = c_1 N/n$. Затраты C_2 при линейном расходе запаса равны затратам на хранение среднего запаса, который за время потребления T_1 равен $sT_1/2$, поэтому они составят:

$$C_2 = \frac{c_2 s T_1}{2} * k = \frac{c_2 s * sT}{2n} * \frac{\theta}{T} = \frac{c_2 s * s\theta}{2n}$$

При расчете затрат C_3 будем считать, что штраф за дефицит составляет в единицу времени c_3 на каждую единицу продукта. Так как средний уровень дефицита за период T_2 равен $(n-s)T_2/2$, штраф за этот период T_2 составит ½*$c_3(n-s)T_2$, а за весь период θ :

$$C_3 = \frac{1}{2} * c_3(n-s)T_2 k = \frac{1}{2} * c_3(n-s)\frac{n-s}{n}T\frac{\theta}{T} = \frac{c_3\theta(n-s)^2}{2n}$$

Суммарные затраты равны:

$$C = \frac{c_1 N}{n} + \frac{c_2 s^2 \theta}{2n} + \frac{c_3 \theta (n-s)^2}{2n}$$

При $n = s$ формула совпадает с ранее полученной формулой в модели без дефицита.

Рассматриваемая задача управления запасами сводится к отысканию такого объема партии n и максимального уровня запаса s, при которых функция C принимает минимальное значение. Другими словами, необходимо исследовать функцию двух переменных $C(n,s)$ на экстремум. Приравнивая частные производные $\partial C/\partial n$, $\partial C/\partial s$ к нулю, получим после преобразований систему уравнений:

$n^2 c_3-(c_2+c_3)s^2=2c_1N/\theta$

$s=n*c_3/(c_2+c_3)$

Решая систему, получаем формулы наиболее экономичного объема партии n_0 и максимального уровня запаса s_0 модели с дефицитом:

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}} * \sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}} = \sqrt{\frac{2c_1b}{c_2}} * \sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}} * \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}} = n_0 * \frac{c_3}{c_2+c_3}$$

Величина

$$\rho = \frac{c_3}{c_2+c_3}$$

где $0 \le \rho \le 1$, называется *плотностью убытков из-за неудовлетворенного спроса* и играет важную роль в управлении запасами. Если значение c_3 мало по сравнению с c_2, то величина ρ близка к нулю, а когда c_3 значительно превосходит c_2, то ρ близка к 1. Недопустимость дефицита равносильна предположению, что $c_3 = \infty$ или $\rho=1$.

Используя формулу для ρ можно записать:

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1b}{c_2\rho}}$$

$$s_0 = n_0 * \rho$$

Следует учесть, что

$\frac{T_1}{T} = \frac{s_0}{n_0} = \rho$ и $\frac{T_2}{T} = \frac{n_0 - s_0}{n_0} = 1 - \rho$

Утверждение о том, что плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса равна ρ, означает, что в течение $(1-\rho)\cdot 100$ % времени полного периода T запас продукта будет отсутствовать.

Оптимальные объемы партий для задач с дефицитом и без него при одинаковых параметрах связаны соотношением $n_{0.\text{деф}} = \frac{n_0}{\sqrt{\rho}}$

Таким образом, *оптимальный объем партии в задаче с дефицитом всегда больше в* $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ *раз, чем в задаче без дефицита.*

Пример 5. Найти наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, сохраняя условия примера 3, кроме недопустимости дефицита, если известно, что отсутствие на сборке каждой детали приносит в сутки убытки в размере 2,5 руб.

Решение

По условию c_2 =0,5, c_3 =2,5. В примере 2 были получены n_0 =148 и T_0 =13. Найдем плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса:

ρ=2,5/(0,5 + 2,5) =0,833,

т. е. 100 ·(1 −0,833) =16,7 % времени между поставками детали на сборке будут отсутствовать. Оптимальный размер партии n_0 должен быть равен:

$n_{0.\text{деф}}$ =148/$\sqrt{0{,}833}$≈162,15

и пропорционально увеличению n_0 должен увеличиться интервал между поставками, т. е.

$T_{0.\text{деф}} = \frac{T_0}{\sqrt{\rho}} = \frac{13}{\sqrt{0{,}833}}$=*14,24 дней*

Стохастические модели управления запасами

Стохастические модели управления запасами — модели, у которых спрос является *случайным.* Рассмотрим наиболее простые из них.

Предположим, что спрос r за интервал времени T является случайным и задан его закон (ряд) распределения $p(r)$ или плотность вероятностей $\psi(r)$. Если спрос r ниже уровня запаса s, то приобретение (хранение) излишка продукта требует дополнительных затрат c_2 на единицу продукта; наоборот, если спрос r выше уровня запаса s, то это приводит к штрафу за дефицит c_3 на единицу продукции.

В качестве функции суммарных затрат, являющейся в стохастических моделях случайной величиной, рассматривают ее среднее значение или математическое ожидание, которое для рассматриваемой модели при дискретном случайном спросе r, имеющем закон распределения $p(r)$, имеет вид:

$$C(s) = c_2 * \sum_{r=0}^{s}(s-r)p(r) + c_3 * \sum_{r=s+1}^{\infty}(r-s)p(r)$$

где первое слагаемое учитывает затраты на приобретение (хранение) излишка $s - r$ единиц продукта (при $r \le s$), а второе слагаемое — штраф за дефицит на $r - s$ единиц продукта (при $r > s$).

В случае непрерывного случайного спроса, задаваемого плотностью вероятности $\psi(r)$, выражение $C(s)$ принимает вид:

$$C(s) = c_2 * \int_0^s (s-r)\psi(r)dr + c_3 * \int_s^{\infty}(r-s)\psi(r)dr$$

Задача управления запасами состоит в отыскании такого запаса s, при котором математическое ожидание суммарных затрат в форме суммы или интеграла принимает минимальное значение.

Доказано, что при дискретном случайном спросе r выражение C(s) минимально при запасе S_0, удовлетворяющем неравенствам

$F(s_0) \leq \rho < F(s_0 + 1)$

а при непрерывном случайном спросе r выражение минимально при значении S_0, определяемом из уравнения

$F(s_0) = \rho$,

где $F(s) = p(r \leq s)$ есть функция распределения спроса r, $F(s_0)$ и $F(s_0 + 1)$ — ее значения; ρ— плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса, определяемая по $\rho = \frac{c_3}{c_2+c_3}$.

Пример 6. Предприятие закупает фильтрующие установки с запасными сменными блоками (фильтрами) к нему. Стоимость одного сменного блока равна 400 руб. В случае выхода установки из строя из-за поломки блока, отсутствующего в запасе, простой установки и срочный заказ нового блока обойдутся в 15 000 руб.

S	0	1	2	3	4	5	6	≥7
R	0	1	2	3	4	5	6	≥7
P(r)	0,00	0,00	0,90	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01

Необходимо определить оптимальное число запасных блоков, которое следует приобрести вместе с агрегатом.

Решение.

По условию $c_2 = 400$, $c_3 = 15\,000$. Вычислим плотность убытков (ρ) из-за нехватки запасных блоков

ρ=15 000/(400 + 15 000) =0,974.

С учетом формулы $F(s) = p(r \leq s)$ найдем значения функции распределения спроса по таблице.

S	0	1	2	3	4	5	6	≥7
R	0	1	2	3	4	5	6	≥7
P(r)	0,00	0,00	0,90	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01
F(s)	0,00	0,00	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00

Оптимальный запас составит $s_0 = 4$, ибо он удовлетворяет неравенству: $F(4) < 0{,}974 < F(5)$.

Пример 7. Решить задачу из примера 5 при условии непрерывного случайного спроса r, распределенного по показательному закону с функцией распределения $F(r) = 1 - e^{-\lambda r}$ при λ=0,98.

Решение

Оптимальное число запасных блоков s_0 найдем из уравнения:

$1 - e^{-\lambda r} = \rho$,

откуда

$e^{-\lambda r} = 1 - \rho$ и $s_0 = -1/\lambda * \ln(1 - \rho)$.

При $\lambda=0{,}98$ $s_0=-(1/0{,}98)\ln 0{,}02=3{,}99\approx 4$ блока.