Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»

Факультет математической экономики, статистики и информатики

Кафедра математических методов в экономике

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по теме «Нелинейные модели» по дисциплине «Моделирование макроэкономики»

Направление подготовки ***38.03.01 Экономика***
Профиль программы ***Математические методы в экономике***
Уровень высшего образования ***Бакалавриат***
Программа подготовки ***Академический бакалавриат***

Москва – 2016 г.

План лекции

1. Основные понятия
2. Выпуклые и вогнутые функции
3. Градиентный метод
4. Графический метод решения задач нелинейного программирования для функций двух переменных
5. Метод множителей Лагранжа
6. Условия Куна-Таккера

Основные понятия

Мы рассмотрели задачу линейного программирования, которая состояла в минимизации или максимизации линейной функции при линейных ограничениях. Однако во многих оптимизационных задачах целевая функция, или функции, задающие ограничения, не являются линейными. Такие задачи называются задачами нелинейного программирования. В качестве примера проявления нелинейности в экономике можно привести эффект «экономии от масштаба», или уменьшение предельной отдачи трудовых ресурсов или основных фондах. Зачастую приходится иметь дело со степенными или логарифмическими производственными функциями.

В общем виде задача нелинейного программирования может быть записана в виде

$$\max f(x)$$
$$g_1(x) \leq b_1$$

…

$$g_m(x) \leq b_m$$

Функция *f{x)* называется целевой функцией, а неравенства g_j(x) , j = 1,…,m называются ограничениями задачи.

<u>Определение</u>. Множество точек x, удовлетворяющих ограничениям задачи (9.1), называется допустимым множеством задачи.

Ограничения могут отсутствовать. В этом случае мы говорим о задаче безусловной оптимизации.

<u>Определение</u>. Оптимальным решением задачи (9.1) (точкой глобального максимума) называется любая точка $x*$ из допустимого множества такая, что справедливо соотношение

$f(x*)>f(x)$,

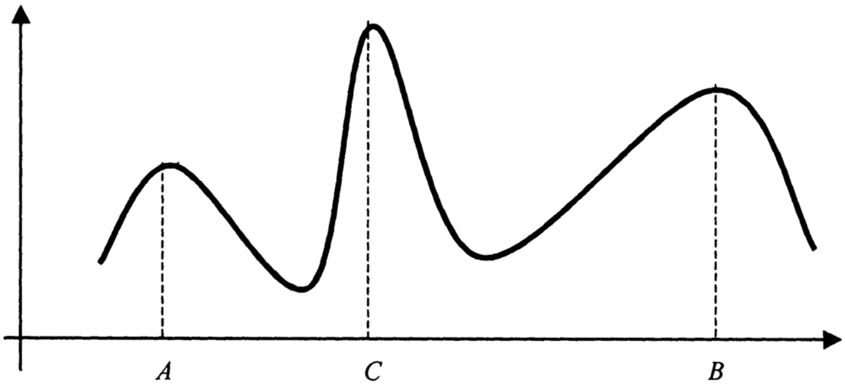
где x — произвольная точка из допустимого множества задачи.

В теории нелинейной оптимизации выделяют понятие локального максимума (локального минимума).

<u>Определение</u>. Точкой $x^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)$ из допустимого множества называется точка локального максимума, если существует некоторое число E > 0, такое, что для любой допустимой точки $x=(x_1,\dots,x_n)$ такой, что

$|x_i^* - x_i| \leq E, i = 1, \dots, n$, выполняется $f(x*) \geq f(x)$

Разницу между глобальным и локальным максимумами легко видеть на рис. 9.1.



Точки A и B являются точками локального максимума, точка С является точкой глобального максимума.

Выпуклые и вогнутые функции

В теории нелинейного программирования отдельно рассматриваются случаи, когда целевая функция и функции ограничений являются выпуклыми (или вогнутыми).

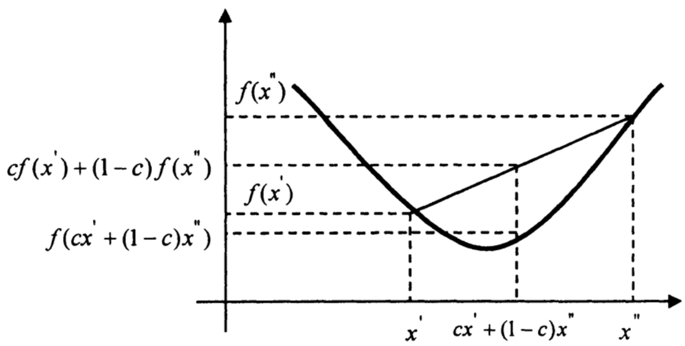
Для задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве любая точка локального максимума является и точкой глобального максимума.

Для задачи минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве любая точка локального минимума является и точкой глобального минимума.

<u>Определение</u>. Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется выпуклой на некотором выпуклом множестве S, если для любых двух точек $x'\epsilon S$ и $x''\epsilon S$ соотношение $f(cx'+(1-c)x'')\leq cf(x')+(1-c)f(x'')$ выполняется для всех c:

$0<c<1$.

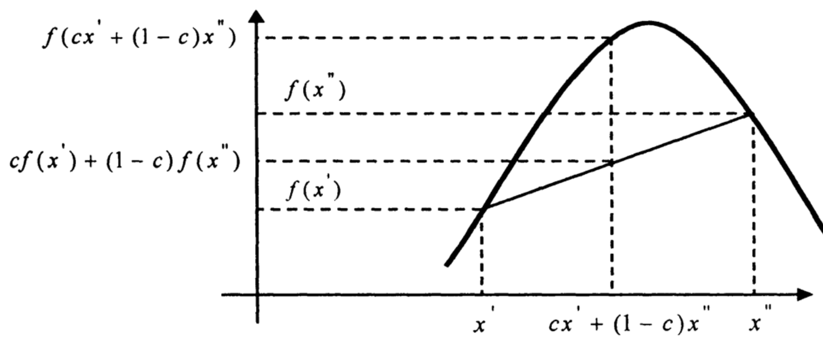
Графический пример выпуклой функции изображен на рис. 9.2.



<u>Определение</u>. Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется вогнутой на некотором выпуклом множестве S, если для любых двух точек $x'\epsilon S$ и $x''\epsilon S$ соотношение $f(cx'+(1-c)x'')\geq cf(x')+(1-c)f(x'')$ выполняется для всех c:

$0<c<1$.

Графический пример вогнутой функции изображен на рис. 9.3.



Нетрудно запомнить, что функция *f(x)* является выпуклой тогда и только тогда, когда *-f(x)* является вогнутой и наоборот.

Выделение именно данных классов функций связано в первую очередь с тем, что для них справедливы следующие теоремы.

Теорема. Пусть рассматривается задача максимизации вогнутой функции *f(x)* на выпуклом множестве *S*. Тогда любая точка локального максимума является и точкой глобального максимума.

Теорема. Пусть рассматривается задача минимизации выпуклой функции *f(x)* на выпуклом множестве S. Тогда любая точка локального минимума является и точкой глобального минимума.

Рассмотрим далее критерии выпуклости и вогнутости функций. Введем некоторые дополнительные определения.

Определение. Гессианом функции называется матрица размером *nxn*, на пересечении i-й строки и j-го столбца которой находится значение соответствующей смешанной производной второго порядка в точке $x=(x_1,\dots,x_n)$, а именно:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Эта матрица обозначается как $H(x_1,\dots,x_n)$.

Определение. Главным минором k-го порядка квадратной матрицы размером *nxn* называется значение любой подматрицы, полученной путем удаления из данной матрицы некоторых *n-к* строк и соответствующих (с теми же номерами) *n-к* столбцов.

Приведем без доказательства следующие теоремы, которые являются критериями выпуклости (вогнутости) для функций, имеющих непрерывные вторые производные.

Теорема. Пусть функция f(x), $x=(x_1,\dots,x_n)$ есть функция, определенная на некотором множестве *S* и имеющая на этом множестве непрерывные частные производные второго порядка. Тогда f(x) есть выпуклая функция на множестве *S* тогда и только тогда, когда все главные миноры Гессиана функции f(x) неотрицательны во всех точках множества *S*.

Теорема. Пусть функция f(x), $x=(x_1,\dots,x_n)$ есть функция, определенная на некотором множестве *S* и имеющая на этом множестве непрерывные частные производные второго порядка. Тогда f(x) есть вогнутая функция на множестве *S* тогда и только тогда, когда знак любого главного минора *к-го* порядка Гессиана функции *f(x)* совпадает со знаком выражения $(-1)^k$ во всех точках множества *S*.

Рассмотрим некоторые примеры применения данных теорем.

Пример. Докажите, что функция

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2+2x_3^2-x_1x_2- x_2x_3 -x_1x_3$

является выпуклой функцией на всей области определения.

Решение.

Построим Гессиан данной функции

$$H(\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Вычислим все главные миноры данной матрицы. Первоначально рассмотрим *главные миноры первого порядка.* После удаления рядов (и столбцов) 1 и 2 остается один единственный элемент 4 > 0. После удаления рядов (и столбцов) 1 и 3 остается один единственный элемент 2 > 0. После удаления рядов (и столбцов) 2 и 3 остается один единственный элемент 2 > 0.

Вычислим все главные миноры второго порядка.

Удаляя строку 1 и столбец 1, получаем

$$det \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0$$

Удаляя строку 2 и столбец 2, получаем

$$det \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0$$

Удаляя строку 3 и столбец 3, получаем

$$det \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Вычислим главные миноры третьего порядка. Таковым единственным минором является сам Гессиан. Вычислим его определитель путем разложения по первой строке, а именно:

$2 \bullet (2 \bullet 4 - (-1) \bullet (-1)) - (-1) \bullet ((-1) \bullet 4 - (-1) \bullet (-1)) + 2) = 6>0.$

Поскольку все главные миноры Гессиана являются неотрицательными на всей области определения функции, функция $f(x_1,x_2,x_3)$ согласно приведенному критерию, является выпуклой.

Пример. Докажите, что функция $f(x_1,x_2)$ $=-x_1^2-2x_2^2-x_1x_2$ является вогнутой функцией на всей области определения.

Решение. Как легко заметить, главные миноры первого порядка имеют значения (совпадающие со значениями диагональных элементов) -2 и -4, т.е. являются отрицательными.

Единственным главным минором второго порядка является сама матрица. Ее определитель равен (-2) • (-4) - (-1) • (-1) = 7 > 0.

Поэтому согласно вышеприведенному критерию, функция $f(x_1,x_2)$ является вогнутой на всей области определения.

Заметим, что для случая функции одной переменной приведенные теоремы принимают следующий вид.

Теорема. Пусть функция f(x) имеет вторую производную во всех точках некоторого выпуклого множества *S*. Тогда функция f(x) является выпуклой функцией на множестве *S* тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ для всех точек x множества *S*.

Теорема. Пусть функция f(x) имеет вторую производную во всех точках некоторого выпуклого множества *S*. Тогда функция f(x) является вогнутой функцией на множестве *S* тогда и только тогда, когда f(x) ≤ 0 для всех точек x множества *S*.

Градиентный метод.

Основная идея градиентного метода состоит в замене максимизируемой (минимизируемой) функции в окрестности конкретной точки ее линейным приближением.

В методе наискорейшего спуска длина шага выбирается из условия минимизации функции вдоль направления антиградиента- для случая минимизации целевой функции, и из условия максимизации функции вдоль градиента-для случая поиска максимума..

Данный метод применим для задач безусловной оптимизации. В общем виде такая задача может быть записана как max(min) $f(x_1,\dots,x_n)$. Основная идея метода состоит в замене максимизируемой (минимизируемой) функции в окрестности конкретной точки ее линейным приближением, получаемым из разложения данной функции в ряд Тейлора в данной точке.

Общая схема метода состоит в построении последовательности приближений $x^0,x^1,\dots,x^n$ исходя из соотношения $x^{k+l}=x^k+a_kh^k$,

где h^k — направление убывания функции f(x) вдоль h^k.

В градиентном методе h^k берется равным антиградиенту функции f(x) в точке $x^к$, а именно h^k = -f'(x^k). Что касается выбора длины шага $a_к$, то в градиентном методе могут использоваться различные алгоритмы. Так, если длина шага выбирается из условия минимизации функции вдоль направления антиградиента, то получаем вариант градиентного метода, носящий название метода наискорейшего спуска.

Приведем пример использования метода наискорейшего спуска.

Пример. Используя метод наискорейшего спуска, решить следующую задачу безусловной оптимизации для функции

$f(x_1,x_2)=-(x_1-3)^2-(x_2-2)^2\to\max$

Решение. В качестве начальной точки выберем x° =(1,1). Вычислим градиент функции $f'(x_1,x_2)=(-2(x_1-3),-2(x_2-2))$, а также его значение в начальной точке f'(1,1)=(4,2). Далее мы должны выбрать значение шага a_0 таким образом, чтобы достигался максимум функции

$f(a_0) = f((1,1) + a_0\,(4,2)) = f(1 + 4\,a_0,1 + 2\,a_0) = -(-2 + 4\,a_0)^2-(-1 + 2\,a_0)^2$.

Данную задачу легко решить, приравнивая нулю первую производную приведенной функции, $f'(a_0) = 0$. А именно: $-8(-2 + 4\,a_0) - 4(-1 + 2\,a_0) = 0$, откуда $a_0 = 0{,}5$.

Тогда x_1 = (1,1) + 0,5(4,2) = (3,2), а f'(3,2) = (0,0). В этом случае реализация алгоритма завершается. Как несложно показать, в силу того что функция $f(x_1,x_2)$ является вогнутой, найденная точка является решением задачи безусловной оптимизации.

Графический метод решения задач нелинейного программирования для функций двух переменных

Рассмотрим задачу нелинейного программирования, содержащую только две переменные, записанную в виде.

$$\max f(x)$$
$$g_1(x) \le b_1$$

…

$$g_m(x) \le b_m$$

$x=(x_1,x_2)\epsilon R^2$

Как уже отмечалось, функция $f(x)$ называется целевой функцией, а неравенства $g_j(x)\le b_j$, $j=1,\dots,m$ называются ограничениями задачи.

Множество точек, удовлетворяющих ограничениям задачи, называется допустимым множеством задачи.

Решить задачу нелинейного программирования графически — значит найти такую точку из допустимого множества, через которую проходит линия уровня $f(x_1,x_2)=C$, имеющая максимальное значение величины C из всех линий уровня, проходящих через допустимые точки задачи. Как и в случае задач линейного программирования, для задач нелинейного программирования, содержащих только две переменные, возможна графическая интерпретация.

Наиболее существенное отличие задачи нелинейного программирования от линейных задач заключается в том, что оптимальное решение может находиться как на границе допустимого множества, так и являться его внутренней точкой.

Этапы графического решения задач нелинейного программирования можно сформулировать следующим образом.

Этап 1. На плоскости наносятся геометрические места точек, соответствующих каждому уравнению из ограничений задачи $g_j(x)\le b_j$, j= 1, ..., m. Строится допустимое множество задачи. Если допустимое множество задачи пусто, то задача не имеет решения.

Этап 2. Строятся линии уровня целевой функции $f(x_1,x_2)=C$ при различных значениях параметра C.

Этап 3. Определяется направление возрастания (для задачи максимизации) или убывания (для задачи минимизации) линий уровня целевой функции.

Этап 4. Определяется точка допустимого множества, через которую проходит линия уровня с максимальным (для задачи максимизации) или минимальным (для задачи минимизации) значением параметра C. Если целевая функция не ограничена сверху (для задачи максимизации) или не ограничена снизу (для задачи минимизации) на допустимом множестве, то задача не имеет решения.

Этап 5. Для найденной точки определяют ее координаты $x=(x_1,x_2)$ и значение целевой функции в данной точке

Пример. Решить следующую задачу нелинейного программирования, используя геометрическую интерпретацию

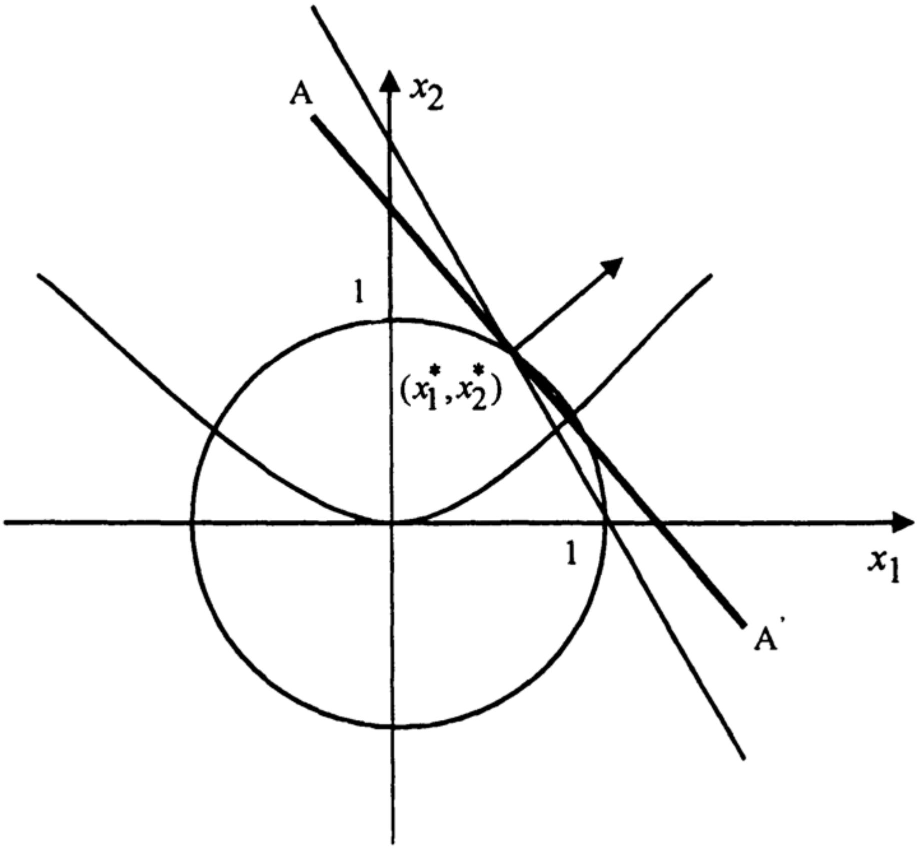
$x_1+x_2\to max$

$x_1^2+x_2^2\le 1$

$2x_1+x_2\le 2$

$x_1^2 - x_2 \leq 0$

Решение. Построим линии, соответствующие ограничениям задачи (9.4), рассмотренным как равенства (рис. 9.2).



Линия уровня, соответствующая максимальному параметру C и проходящая через какую-либо точку допустимого множества, изображена на рис. 9.4. Координаты оптимальной точки находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

откуда $x_1^* = \frac{3}{5}, x_2^* = \frac{4}{5}$

Метод множителей Лагранжа

Пусть требуется решить задачу нелинейного программирования следующего вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) \to \max(\min)$$
$$g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1$$

…

$$g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m$$

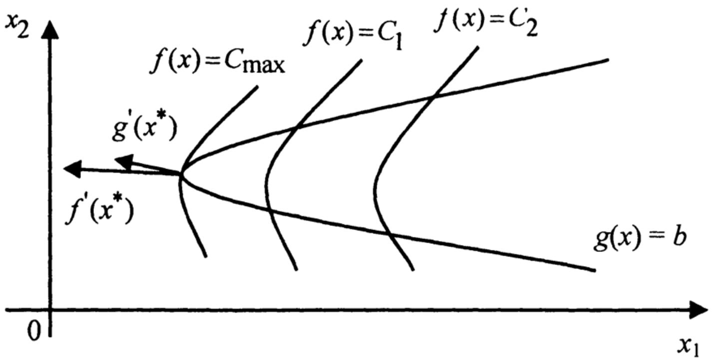
где функции f и g_j, j=1,…,m непрерывны, и непрерывны их частные производные по x_j, j=1,…,n

Для решения поставленной задачи может быть применен метод множителей Лагранжа. Объясним идею метода на примере задачи нелинейного программирования, зависящей от двух переменных и имеющей только одно ограничение:

$$\max f(x)$$
$$g_1(x) = b_1$$

$x=(x_1,x_2)\in R^2$

Будем исходить из геометрической интерпретации задачи, описанной в параграфе 9.4. А именно, заметим, что линия уровня с максимальным значением параметра С будет касаться линии границы в точке, являющейся оптимальным решением задачи. Схематично это изображено на рис. 9.5.



Поскольку две гладкие линии (имеющие непрерывные частные производные) касаются друг друга в точке x^*, то их векторы-нормали сонаправлены. Поскольку вектор-нормаль есть градиенты функций (вектор частных производных), то справедливо векторное соотношение

$f'(x^*)=\lambda g'(x^*)$, где λ есть некоторый коэффициент пропорциональности. Координаторами векторов $f'(x^*)$ и $g'(x)$ являются значения частных производных функций f и g соответственно в точке x^*.

$$f'(x^*) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2})$$
$$g'(x^*) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}; \frac{\partial g}{\partial x_2})$$

Из условия пропорциональности в точке x^* имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

Для определения значений x_1 и x_2 ,в которых функция f достигает максимума, к этим уравнениям надо добавить условие принадлежности точки x^* графику функции $g(x_1,x_2)=b$.

Окончательно получаем систему уравнений, определяющую оптимальное решение поставленной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ \mathrm{g}(\mathrm{x}_1, x_2) = \mathrm{b} \end{cases}$$

Введем новую функцию

$L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda(b-g(x_1,x_2))$

Тогда последняя система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Функцию L называют функцией Лагранжа.

Приведем ниже алгоритм метода множителей Лагранжа решения задач нелинейного программирования.

Этап 1. Составляют функцию Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (b_j - g_j(x_1, \dots, x_n))$$

Этап 2. Находят частные производные функции Лагранжа по x_i *и* λ_j и приравнивают их к нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, n \\ g_j(x_1, \dots, x_n) = b_j, j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Этап 3. Решают систему (9.5) и определяют точки, в которых функция $f(x_1, \dots, x_n)$ может иметь экстремум.

Этап 4. Проверяют полученные на этапе 3 точки на экстремум и определяют экстремальное значение функции f найденной точки.

Рассмотрим применение изученных методов на примере решения задачи оптимальной реализации продукции.

Пример (расчет экономико-математической модели при нелинейных затратах на производство). Фирма реализует автомобили двумя способами: через магазин и через торговых агентов. При реализации x_1 автомобилей через магазин расходы на реализацию составляют $4x_1 + x_1^2$ усл. ед., а при продаже x_2 автомобилей через торговых агентов расходы составляют

x_2^2 усл. ед. Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 шт.

Решение. Составим математическую модель задачи. Целью является минимизация суммарных расходов $R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2$

Управляющие переменные— это число автомобилей, реализуемых первым и вторым способом: x_1 и x_2 соответственно (200 шт.).

Окончательно математическая модель имеет следующий вид:

$R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2$

$x_1+x_2=200$

$x_1\geq 0$

$x_2\geq 0$

Для ее расчета применим метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$L(x_1,x_2,\lambda)= 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 +\lambda(200- x_1-x_2)$

Найдем частные производные функции L по x_1, x_2 и λ и приравняем их к нулю.

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 4 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 200 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, найдем x_1= 99, X_2 = 101, λ = 202, $R(x_1,x_2)$ = 20 398.

Таким образом, для получения минимальных расходов, нужно реализовать 99 автомобилей через магазин и 101 автомобиль через торговых агентов. При этом расходы на реализацию составят 20 398 усл. ед.

Условия Куна — Танкера

Важное место в теории выпуклого программирования занимают условия Куна-Таккера, названные так в честь открывших их американских математиков Куна и Таккера.

Пусть требуется решить задачу нелинейного программирования следующего вида:

$$f(x_1,\dots,x_n) \to \max(\min)$$
$$g_1(x_1,\dots,x_n) \leq b_1$$

…

$$g_m(x_1,\dots,x_n) \leq b_m$$

Тот факт, что ограничения задачи содержат только ограничения в виде неравенств «меньше или равно», никак не ограничивает общность задачи, поскольку каждое неравенство вида «больше или равно» приводится к требуемому виду умножением левой и правой частей на -1. Каждое равенство может быть представлено в виде двух неравенств противоположного знака, а далее неравенство вида «больше или равно» приведено к неравенству вида «меньше или равно» описанным способом.

Далее будем предполагать, что функции $g_j(x)$, $j = 1, ..., m$ выпуклы и удовлетворяют так называемым условиям регулярности. Не давая точных математических понятий этим условиям, это означает, сто существует точка x, такая, что выполняются соотношения $g_j(x) < b_j \; j = 1, \ldots, m$.

Теорема. Пусть задача (9.6) есть задача максимизации; функции f(x), g_j(x) дифференцируемы на допустимом множестве. Функции $g_j(x)$ $j = 1, \ldots, m$ выпуклые и удовлетворяют условиям регулярности. Если точка $x=(x_1,\ldots,x_n)$ является оптимальным решением задачи (9.6), то существуют значения $\lambda_1^*,\ldots, \lambda_m^*$ такие, что выполняются соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g(x^*)}{\partial x_i} = 0, i = 1, \ldots, n \\ \lambda_j^*(g_j(x_1^*, \ldots, x_n^*) - b_j) =, j = 1, \ldots, m \\ \lambda_j^* \geq 0, j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Для задачи минимизации аналогичная теорема имеет следующий вид с точность до замены знака перед суммой $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g(x^*)}{\partial x_i}$

Как видно из формулировок приведенных теорем, они определяют необходимые условия оптимальности для задачи (9.6). При дополнительных предположениях относительно целевой функции могут быть сформулированы уже необходимые и достаточные условия оптимальности (критерии оптимальной точки). Эти условия определяют две следующие теоремы.

Теорема. Пусть задача (9.6) есть задача максимизации, функции f(x), g_j(x) дифференцируемы на допустимом множестве. Функции g_j(x), $j = 1, ..., m$ выпуклые и удовлетворяют условиям регулярности. Функция $f(x)$ является вогнутой. Тогда точка $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ является оптимальным решением задачи (9.6) тогда и только тогда, когда существуют значения $\lambda_1^*,\ldots, \lambda_m^*$ такие, что выполняются соотношения (9.7).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g(x^*)}{\partial x_i} = 0, i = 1, \ldots, n \\ \lambda_j^*(g_j(x_1^*, \ldots, x_n^*) - b_j) =, j = 1, \ldots, m \\ \lambda_j^* \geq 0, j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Аналогично формулируется теорема для задачи на минимизацию.

Рассмотрим пример использования условий Куна-Таккера для обоснования оптимальности найденной точки.

Пример. Производитель имеет возможность закупить некоторый химический компонент в количестве 17.25 единиц по цене 10 долл., за единицу. Из единицы данного вещества можно произвести единицу продукции 1, затратив 3 долл, на переработку, или единицу продукта 2, затратив 5 долл, на переработку. Если произведено x_1 единиц продукции 1, то она будет продана по цене 30-x_1 долл., за единицу. Если будет произведено x_2 единиц продукции 2, то она будет продана по цене 50-2x_2 долл., за единицу. Определите, каким образом производитель должен максимизировать свою прибыль.

Решение.

Таким образом, переменными задачи являются x_1— количество единиц продукции 1, x_2 — количество единиц продукции 2, x_3 — количество единиц закупленного химического компонента.

В математическом виде задача о максимизации прибыли производителя формулируется в следующем виде:

$\max(x_1 (30 – x_1) + x_2 (50 - 2x_2) – 3x_1 - 5x_2 -10x_3)$

$x_1 + x_2 - x_3 \leq 0,$

$x_3 \leq 17.25,$

$x_1,x_2,x_3 \geq 0.$

Целевая функция является вогнутой функцией (как сумма вогнутых функций). Функции ограничений являются выпуклыми (так как они являются линейными). Функции ограничений удовлетворяют условиям регулярности (так как они являются линейными). Поэтому для данной задачи условия (9.7) являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности. Для данной задачи условия (9.7) принимают следующий вид:

$30 - 2x_1 - 3 – \lambda_1= 0$ 9.9

$50 – 4x_2 – 5 – \lambda_1=0$ 9.10

$-10+\lambda_1-\lambda_2=0$ 9.11

$\lambda_1(-x_1-x_2+x_3)=0$ 9.12

$\lambda_2(1725-x_3)=0$ 9.13

$\lambda_1 \geq 0$

$\lambda_2 \geq 0$

Далее рассмотрим несколько случаев.

1. $\lambda_1= \lambda_2=0$. Но это невозможно, поскольку будет нарушено соотношение -10+λ_1-λ_2=0

2. $\lambda_1= 0$, $\lambda_2 \geq 0$.Так как $\lambda_1= 0$, то из (9.11) $\lambda_2 = -10$, что противоречит $\lambda_2 \geq 0$.

3. $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2=0$. Из (9.11) $X_x =10$. Из (9.9) $x_1 =8,5$, а из (9.10) $x_2 =8,75$.

Из (9.12)= 17,25. Поэтому $x_1^* =8,5$, $x_2^* =8,75$, $x_3^* =17,25$, $\lambda_1^*=10$, $\lambda_2^*=$ 0 — удовлетворяют условиям Куна-Таккера, а следовательно, оптимальная точка найдена. Таким образом, максимальная прибыль будет достигнута при закупке химического компонента в количестве 17,25, производстве продукта 1 в количестве 8,5, а продукта 2 в количестве 8,75.