Министерство образования и науки Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»**

Факультет математической экономики, статистики и информатики

Кафедра математических методов в экономике

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по теме «Линейные модели» по дисциплине «Моделирование макроэкономики»

Направление подготовки ***38.03.01 Экономика***
Профиль программы ***Математические методы в экономике***
Уровень высшего образования ***Бакалавриат***
Программа подготовки ***Академический бакалавриат***

Москва – 2016 г.

Линейное программирование.

План лекции

1. Линейное программирование как инструмент математического моделирования экономики
2. Примеры моделей линейного программирования
3. Формы задач линейного программирования
4. Графический метод решения задач линейного программирования
5. Решение задачи симплексным методом

Линейное программирование как инструмент математического моделирования экономики

Исследование свойств общей системы линейных неравенств ведется с XIX в., а первая оптимизационная задача с линейной целевой функцией и линейными ограничениями была сформулирована в 30-е годы XX в. Одним из первых зарубежных ученых, заложивших основы линейного программирования, является Джон фон Нейман, широко известный математик и физик, доказавший основную теорему о матричных играх. Среди отечественных ученых большой вклад в теорию линейной оптимизации внесли лауреат Нобелевской премии Л.В. Канторович, Н.Н Моисеев, Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин и многие другие.

Линейное программирование традиционно считается одним из разделов исследования операций, который изучает методы нахождения условного экстремума функций многих переменных.

В классическом математическом анализе исследуется общая постановка задачи определения условного экстремума, однако в связи с развитием промышленного производства, транспорта, агропромышленного комплекса, банковского сектора традиционных результатов математического анализа оказалось недостаточно. Потребности практики и развитие вычислительной техники привели к необходимости определения оптимальных решений при анализе сложных экономических систем. Главным инструментом для решения таких задач является математическое моделирование, т.е. формализованное описание изучаемого процесса и исследование его с помощью математического аппарата.

Искусство математического моделирования состоит в том, чтобы учесть как можно более широкий спектр факторов, влияющих на поведение объекта, используя при этом по возможности несложные соотношения. Именно в связи с этим процесс моделирования часто носит многоэтапный характер. Сначала строится относительно простая модель, затем проводится ее исследование, позволяющее понять, какие из интегрирующих свойств объекта не улавливаются данной формальной схемой, после чего за счет усложнения модели обеспечивается большая ее адекватность реальности. При этом во многих случаях первым приближением к действительности является модель, в которой все зависимости между переменными, характеризующими состояние объекта, являются линейными. Практика показывает, что значительное количество экономических процессов достаточно полно описывается линейными моделями, а следовательно, линейное программирование как аппарат, позволяющий отыскивать условный экстремум на множестве, заданном линейными уравнениями и неравенствами, играет важную роль при анализе этих процессов.

Примеры моделей линейного программирования

Ниже будут рассмотрены несколько ситуаций, исследование которых возможно с применением средств линейного программирования. Так как основным показателем в этих ситуациях является экономический— стоимость, то соответствующие модели являются экономико-математическими.

В экономико-математических моделях линейного программирования часто в качестве оценки качества решения используются такие показатели, как: прибыль, затраты, объем производства.

Задача о раскрое материалов. На обработку поступает материал одного образца в количестве d единиц. Требуется изготовить из него k разных комплектующих изделий в количествах, пропорциональных числам $a_1,\dots,a_k$. Каждая единица материала может быть раскроена n различными способами, при этом использование i-го способа (i = 1,...,n) дает b_{ij} единиц j-ого изделия (j = 1,..., k).

Требуется найти план раскроя, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Экономико-математическая модель этой задачи может быть сформулирована следующим образом. Обозначим x_i – число единиц материалов, раскраиваемых i-м способом, и x— число изготавливаемых комплектов изделий.

Учитывая, что общее количество материала равно сумме его единиц, раскраиваемых различными способами, получим:

$$\sum_{1}^{n} x_i = d$$

Условие комплектности выразится уравнениями:

$\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} = a_j x$, j=1,…,k (1)

Очевидно, что

$x_i \geq 0$, i=1,…,n (2)

Целью является определить такое решение $X=(x_1,\dots,x_n)$, удовлетворяющее ограничениям (1)-(2), при котором функция F = x принимает максимальное значение.

Проиллюстрируем рассмотренную задачу следующим примером

Для изготовления брусьев длиной 1,5 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 200 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Чтобы сформулировать соответствующую оптимизационную задачу линейного программирования, определим все возможные способы распила бревен, указав соответствующее число получаемых при этом брусьев (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Способ распила i	Число получаемых брусьев различной длины		
	1,5 м	3,0 м	5,0 м
1	4	-	-
2	2	1	-
3	-	2	-
4	-	-	1

Обозначим через x_i— число бревен, распиленных i способом (i = 1.2, 3, 4); x —число комплектов брусьев.

С учетом того, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, оптимизационная экономико-математическая модель примет следующий вид

x -> шах

при ограничениях:

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 200$

$4x_1 + 2x_2 = 2x$

$x_2 + 2x_3 = x$

$x_4 = 3x$

$x_i \geq 0$, i=1,…,4

Задача выбора оптимальной производственной программы предприятия. Пусть предприятие может выпускать n различных видов продукции. Для выпуска этих видов продукции предприятие использует M видов материально-сырьевых ресурсов и N видов оборудования. Необходимо определить объемы производства предприятия (т.е. его производственную программу) на заданном интервале планирования [0, T], чтобы максимизировать валовую прибыль предприятия.

Далее будем полагать, что валовая прибыль есть выручка, полученная от реализации продукции за вычетом условно-постоянных и переменных затрат. Иными словами, необходимо максимизировать целевую функцию вида:

$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i - Zp -> max,$ (3)

где a_i,— цена реализации продукции вида i;

b_i — переменные затраты на выпуск одной единицы продукции вида i;

Zp — условно постоянные затраты, которые будем предполагать независимыми от векторах = (x_1..., x_n).

При этом должны быть выполнены ограничения на объемы используемых материально-сырьевых ресурсов и время использования оборудования на интервале [0,T].

Обозначим через L_j (j = 1,..., M) объем запасов материально-сырьевых ресурсов вида j, а через $\tau_к$ (к = 1,…,N) — время, в течение которого может быть использовано оборудование вида к. Известно потребление материально-сырьевых ресурсов вида j на выпуск одной единицы продукции вида i, которое обозначим через l_{ij}.

Известно также t_{ik} — время занятости одной единицы оборудования вида к изготовлением одной единицы продукции вида i. Через $m_к$ обозначим количество единиц оборудования вида к (к = 1,..., N).

При введенных обозначениях ограничения на объем потребляемых материально-сырьевых ресурсов могут быть заданы таким образом:

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij}x_i \leq L_j \text{ , } j = 1, \dots, M$$

Ограничения на производственные мощности задаются следующими неравенствами

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ik}x_i \leq \tau_k m_k \text{ , } k = 1, \dots, N$$

Кроме того, переменные

$x_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$

Таким образом, задача выбора производственной программы, максимизирующей прибыль, заключается в выборе такого плана выпуска $X=(x_1,\ldots,x_n)$, который удовлетворял бы ограничениям и максимизировал бы функцию.

В некоторых случаях предприятие должно поставить заранее оговоренные объемы продукции V, другим хозяйствующим субъектам и тогда в рассматриваемой модели вместо ограничения $x_i \geq 0$ может быть включено ограничение вида:

$x_i \geq V_i$

Задача о диете. Рассмотрим задачу составления душевого рациона питания минимальной стоимости, которое бы содержало определенные питательные вещества в необходимых объемах. Будем предполагать, что имеется известный перечень продуктов из n наименований (хлеб, сахар, масло, молоко, мясо и т.д.), которые мы будем обозначать буквами $F_1,...,F_n$. Кроме того, рассматриваются такие характеристики продуктов (питательные вещества), как белки, жиры, витамины, минеральные вещества и другие. Обозначим эти компоненты буквами $N_1,\ldots,N_m$. Предположим, что для каждого продукта F_i известно (i = 1,...,n) количественное содержание в одной единице продукта указанных выше компонент. В этом случае можно составить таблицу, содержащую характеристику продуктов:

	F_1	F_2	…	F_j	…	F_n
N_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}
N_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
…						
N_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{in}

…						
N_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}		a_{mn}

Элементы этой таблицы образуют матрицу, имеющую m строк и n столбцов. Обозначим ее через A и назовем матрицей питательности. Предположим, что мы составили рацион $x = (x_1,\ldots,x_n)$ на некоторый период (например, месяц). Иными словами, мы планируем каждому человеку на месяц x_1 единиц (килограммов) продукта F_1, x_2 единиц продукта F_2 и т.д. Нетрудно вычислить, какое количество витаминов, жиров, белков и прочих питательных веществ получит человек за этот период. Например, компонента N_1 присутствует в этом рационе в количестве

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n$,

поскольку согласно условию в x_1 единицах продукта F_1 согласно матрице питательности содержится $a_{11}x_1$ единиц компоненты N_1; к этому количеству добавляется порция $a_{12}x_2$ вещества N_1 из x_2 единиц продукта F_2 и т.д. Аналогично можно определить и количество всех остальных веществ N_i в составляемом рационе $(x_1,\ldots,x_n)$.

Допустим, что имеются определенные физиологические требования, касающиеся необходимого количества питательных веществ в N_i ($i = 1,..., n$) в планируемый срок. Пусть эти требования заданы вектором $b = (b_1,\ldots,b_n)$, i-я компонента которого b_i указывает минимально необходимое содержание компонента N_i в рационе. Это означает, что компоненты x_i вектора x должны удовлетворять следующей системе ограничений:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\geq b_1$

…

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\geq b_m$

Кроме того, из содержательного смысла задачи очевидно, что все переменные $x_1,\ldots,x_n$ неотрицательны и поэтому к ограничениям добавляются еще неравенства

$x_i\geq 0$, $i=1,\ldots,n$

Учитывая, что в большинстве случаев ограничениям удовлетворяет бесконечно много рационов, выберем тот из них, стоимость которого минимальна.

Пусть цены на продукты $F_1...$, F_n равны соответственно $c_1...,c_1$. Следовательно, стоимость всего рациона $x = (x_1,\ldots,x_n)$ может быть записана в виде

$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ -> min.

Окончательно формулировка задачи о диете заключается в том, чтобы среди всех векторов $x = (x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющих ограничениям выбрать такой, для которого целевая функция принимает минимальное значение.

Транспортная задача. Имеется m пунктов $S_1,..., S_m$ производства однородного продукта (угля, цемента, нефти и т.п.), при этом объем производства в пункте S_i равен a_i единиц. Произведенный продукт потребляется в пунктах $Q_1,\ldots,Q_n$ и потребность в нем в пункте Q_j составляет b_j единиц ($j = 1,..., n$). Требуется составить план перевозок из пунктов S_i в пункты Q_j, чтобы удовлетворить потребности в продукте b_j, минимизировав транспортные расходы.

Пусть стоимость перевозок одной единицы продукта из пункта S_i в пункт Q_j равна c_{ij}. Будем далее предполагать, что при перевозке x_{ij} единиц продукта из S_i в Q_j транспортные расходы равны c_{ij}.

Назовем планом перевозок набор чисел x_{ij} , удовлетворяющий ограничениям:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i$

$x_{ij} \geq 0$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$

Содержательный смысл уравнений (1.12) состоит в том, что из пункта S_i при плане x_{ij}, вывозится во все пункты Q_j объем $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ который должен быть равен запасу a_i. В пункт Q_j поступает из всех пунктов S_i суммарное количество продукта, которое в точности должно быть равно потребности b_j.

При плане перевозок (x_{ij}) транспортные расходы составят величину

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Окончательное формирование транспортной задачи таково: среди всех наборов чисел (x_{ij}), удовлетворяющих ограничениям (1.12), найти набор, минимизирующий (1.13).

Формы задач линейного программирования

Мы рассмотрели примеры задач линейного программирования, на основании которых можно представить три формы задач линейного программирования в зависимости от наличия ограничений разного типа.

Стандартная задача линейного программирования

$$max\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_j\ , j = 1, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$$

Стандартная задача имеет важное значение ввиду того, что большое число прикладных моделей сводится к этому классу задач линейного программирования.

Каноническая задача линейного программирования.

$$max\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = b_j\ , j = 1, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

Основные вычислительные методы (симплекс-метод и его модификации) решения задач линейного программирования разработаны именно для канонической задачи.

Общая задача линейного программирования.

Необходимо максимизировать (или минимизировать) линейную функцию от n переменных $x_1,\dots,x_n$ вида

$$\max(\min) \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, j = 1, \dots, k$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j, j = k+1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, r$$

Здесь k <m, r <n. Понятно, что стандартная задача получается как частный случай общей при к = m, r = n каноническая — при k = 0, r = n.

Все три перечисленные формы задач эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно простыми преобразованиями привести к любой из двух остальных. Поэтому если имеется способ решения одной из этих трех задач, то тем самым может быть решена и любая другая из двух оставшихся.

Рассмотрим примеры задачи линейного программирования, приведенные ранее. Задача о диете и задача выбора оптимальной производственной программы являются стандартными задачами линейного программирования, а задача о раскрое материалов и транспортная задача — канонические задачи линейного программирования.

Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется для решения задачи с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами. Он хорошо иллюстрирует основные принципы поиска решения ЗЛП и анализа устойчивости этого решения.

Рассмотрим графический метод решения на примере 1.

Пример 1. Предприятие изготавливает и реализует два вида продукции — P1 и P2. Для производства продукции используются два вида ресурсов — сырье и труд. Максимальные запасы этих ресурсов в сутки составляют 14 и 26 ед., соответственно. Расход ресурсов на изготовление каждого вида продукции, запасы и оптовые цены продукции приведены в табл. 1.3.1.

Таблица 1.3.1

Ресурсы	Расходы ресурсов на 1 ед. продукции		Запас продукции
	P1	P2	
Сырье	1	3	14
Труд	4	2	26
Оптовая цена	3	3	

Известно, что суточный спрос на продукцию P1 никогда не превышает спроса на продукцию P2 более чем на 5 ед., а спрос на продукцию P2 никогда не превышает 4 ед. в сутки.

Как спланировать выпуск продукции предприятия, чтобы выручка от ее реализации была максимальной?

Математическая модель задачи

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид.

Максимизировать целевую функцию:

$F = 3x1 + 3x2$.

При следующих ограничениях:

$x1 + 3x2 \leq 14$ (1-е ограничение на сырье); (1.3.1)

$4x1 + 2x2 \leq 26$ (2-е ограничение на труд); (1.3.2)

$x1 - x2 \leq 5$ (3-е ограничение спроса 1); (1.3.3)

$x2 \leq 4$ (4-е ограничение спроса 2); (1.3.4)

$x1 , x2 \geq 0$ (1.3.5)

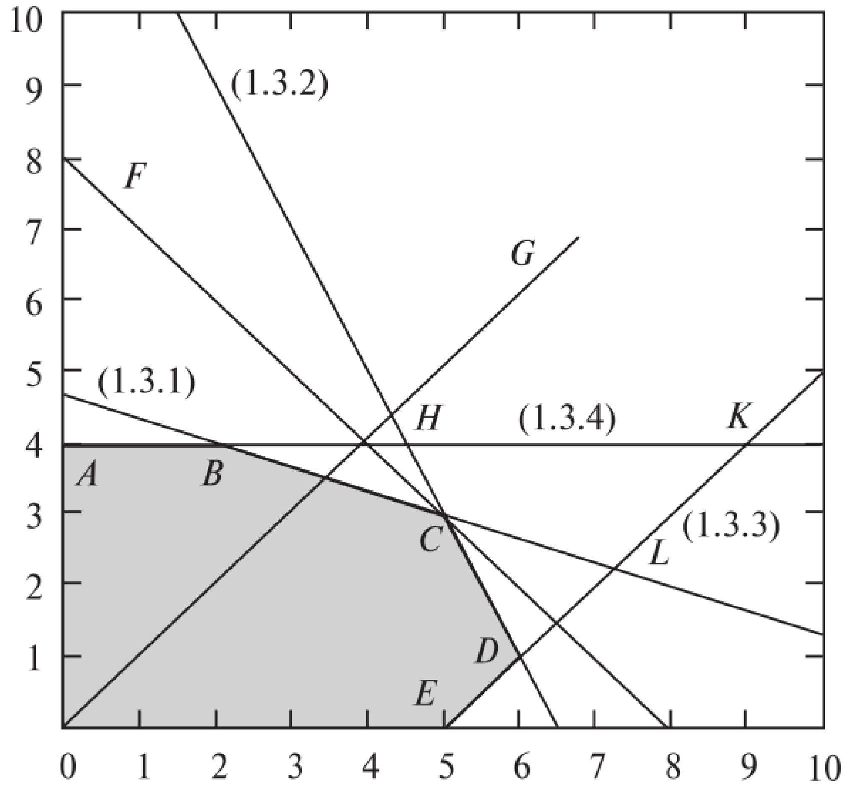
Решение задачи

Каждое из неравенств системы ограничений (1.3.1)—(1.3.5) геометрически определяет полуплоскость. Пересечение этих полуплоскостей задает область допустимых решений планов ЗЛП.

В общем случае такая область представляет собой одну из следующих фигур: выпуклый многоугольник, неограниченная многоугольная область, луч, отрезок, точка или пустая область. В последнем случае говорят, что ограничения не совместны.

Для построения данной области необходимо построить граничные прямые задания уравнениям системы ограничений, в которых неравенства заменяются равенствами.

Пример построения такой области для решаемой задачи приведен на рис. 1.3.1. Первым неравенством (1.3.1) определяются две области на плоскости (рис. 1.3.1).



Решение ЗЛП геометрическим способом

Одна из них — это область возможных планов задачи, другая — область, где этих планов нет. Границей между ними будет прямая, которую мы построим, заменив неравенство $x1 + 3x2 \leq 14$ равенством $x1 + 3x2 = 14$ (прямая 1.3.1). По знаку первого неравенства находим

область решения задачи. Аналогично, заменив неравенства равенствами, строим прямые 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 и по знакам неравенств определяем область решений задачи.

На рис. 1.3.1 цифры в скобках определяют порядковый номер ограничения в списке ограничений. Латинскими буквами обозначены точки пересечения прямых. Неравенства $x1 \geq 0$ и $x2 \geq 0$ означают, что область решения будет расположена в первом квадранте координатной плоскости: справа от оси ординат и над осью абсцисс. Таким образом, заштрихованная на рис. 1.3.1 область OABCDE будет областью допустимых решений, определенной ограничениями задачи. Крайние точки полученной выпуклой многогранной области будут соответствовать допустимым базисным решениям задачи.

Для нахождения оптимального плана необходимо построить многоугольник пересечения целевой плоскости с многогранной выпуклой «призмой» области ограничений и выбрать на нем вершину с максимальным значением. Для упрощения этой трехмерной графической задачи пользуются свойствами целевой плоскости, позволяющими получить решение, проецируя изображение на плоскость ограничений.

Сначала определяют направление максимального возрастания значения целевой функции. Для этого находят вектор градиента G, координатами которого являются коэффициенты целевой функции.

Для данного примера, он имеет значение G = (3, 3). Прямая, идущая в направлении градиента, также обозначена на рис. 1.3.1 буквой G.

Для определения оптимального решения необходимо построить прямую, перпендикулярную линии градиента и перемещать ее параллельно вдоль линии градиента до самой удаленной точки области. Такие прямые, перемещаемые вдоль линии градиента являются ни чем иным, как линиями уровня плоскости. Если решается задача поиска

максимума, то линии уровня перемещаются в направлении возрастания градиента до поиска самой удаленной точки области ограничений. В случае поиска минимума линии перемещаются в направлении, противоположном возрастанию градиента, до самой удаленной точки. На рис. 1.3.1 линия уровня, определяющая оптимальную точку С, в которой значение целевой функции достигает своего максимума, обозначена F.

Зная, какая точка задает оптимальное решение, можно точно вычислить ее координаты. Для данного примера точка С находится на пересечении прямых 1.3.1. и 1.3.2. Ресурсы, соответствующих ограничений будут являться дефицитными.

Записав систему уравнений этих прямых, определяем координаты точки пересечения:

$x1 + 3x2 = 14$;

$4x1 + 2x2 = 26$.

В результате получаем Xопт = (5, 3). Подставляя полученный результат в целевую функцию получаем искомое оптимальное значение

Fопт(5, 3) = 24.

Решение задачи симплексным методом

Симплекс-метод является наиболее распространенным универсальным вычислительным методом, который может быть применен для решения любых задач линейного программирования как вручную, так и с помощью ЭВМ (см. п. 1.4.1).

Идея метода состоит в последовательном продвижении по базисам опорных планов задачи, т. е. в последовательном улучшении планов задачи по определенному критерию до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

Рассмотрим последовательно процесс подготовки исходных данных и алгоритм решения задачи ЛП табличным симплекс-методом.

Для решения задачи ЛП, представленной в форме

$F(X) = C^TX \rightarrow \max (\min)$ (1.4.1)

при условиях

AX { ≤ ; = ; ≥ } B; (1.4.2)

X ≥ 0 (1.4.3)

необходимо предварительно выполнить следующие процедуры:

• привести математическую модель задач к каноническому виду;

• определить начальное допустимое базисное решение задачи;

• ввести в исходную симплекс-таблицу следующие параметры, соответствующие начальному базисному решению: весовые коэффициенты при переменных x_j в целевой функции (строка c_j); переменные, которые входят в текущий базис x_i (столбец Bx;); значения базисных переменных — $x_i = a_{i0}$ (столбец A0); элементы $\| a_{ij} \|$, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, матрицы условий задачи Amin (столбцы A1, A2, ..., An); оценки Δ_j , j = 1, ..., n, соответствующие векторам A1, A2, ..., An (последняя индексная строка). Оценки Δ_j определяются по формуле

$$\Delta_i = z_j - c_j, \qquad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\,, \qquad j = 1, \dots, n$$

Весовые коэффициенты c_i при базисных переменных проставляются во второй слева столбец таблицы.

Алгоритм симплекс-метода

1. Заполняется исходная симплекс-таблица (табл. 1.4.5) по указанным выше правилам.

2. Если $\Delta_j \geq 0$ для всех j = 1, ..., n, то данный план является оптимальным.

3. Если имеются $\Delta_j < 0$ и в столбце A_k все элементы $a_{ik} \leq 0$, то

функция не ограничена сверху на области допустимых решений.

4. Если имеются $\Delta_j < 0$ и в столбцах A_j, соответствующих этим отрицательным оценкам, существует хотя бы один элемент $a_{ij} > 0$, то возможен переход к новому, лучшему плану, связанному с большим значением целевой функции.

Базис	Весовые коэффициенты (*C*)	Свободный член (*B*)	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
			C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
X_4	C_4	B_1	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	Оценочный столбец
X_5	C_5	B_2	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	
X_6	C_6	B_3	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{35}	A_{36}	
Оценочная строка →			Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	

5. Элемент As , который необходимо ввести в базис для улучшения плана, определяется в последней строке симплекс-таблицы по наименьшей отрицательной оценке Δ_j. Столбец (s), содержащий эту оценку, считается разрешающим.

6. Вычисляют отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (симплекс-отношение). Наименьшее из этих симплекс-отношений соответствует разрешающей строке (q — строка).

Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выбирают любое из них. То же самое относится к положительным элементам последней строки симплекс-таблицы.

Оценочные симплекс-отношения по каждой строки определяются по следующим правилам:

а) ∞, если b_i и a_{is} имеют разные знаки;

б) ∞, если $b_i = 0$ и $a_{is} < 0$;

в) ∞, если $a_{is} = 0$;

г) 0, если $b_i = 0$ и $a_{is} > 0$;

д) $|b_i/a_{is}|$, если b_i и a_{is} имеют одинаковые знаки.

Определяем $\min(\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|)$

Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимума и Fmax = ∞.

7. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент (a_{qs}).

8. Переходим к следующей таблице по правилам:

а) в левом столбце (Базис) записываем новый базис: вместо основной переменной x_q — переменную x_s;

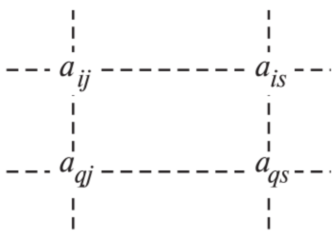
б) в столбцах, соответствующих основным переменным, проставляем нули и единицы: 1 — напротив «своей» основной переменной, 0 — напротив «чужой» основной переменной; 0—в последней строке для всех основных переменных;

в) элементы строки с номером q рассчитываем делением значения старой строки на разрешающий элемент a_{qs};

г) все остальные элементы новой таблицы a'_{ij} вычисляем по правилу прямоугольника:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}\,a_{qj}}{a_{qs}}\quad a_{ij}\ a_{is}$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{is}\,b_q}{a_{qs}}\quad a_{qj}\ a_{qs}$$



9. Далее переходим к п. 2. Процесс вычисления заканчивается, когда найдено оптимальное решение, либо когда функция будет неограниченной на ОДР (п. 3).