РАЗДЕЛ II. ОПТИМИЗАЦИОННО-РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАНКА

ТЕМА 6. ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАНКА

6.1. Основные направления экономико-математического моделирования банковской деятельности

Моделирование не самоцель, а инструмент для решения проблемных задач. Финансово-экономическая деятельность коммерческого банка достаточно сложный и многогранный процесс, при осуществлении которого банк сталкивается со многими трудностями и проблемами. Если взять все эти проблемы в совокупности, то их можно объединить в одну комплексную проблему – проблему развития банка в соответствии с его целями. В силу большой сложности и неоднозначности процессов, происходящих в банковской сфере, однозначных рецептов для решения указанной проблемы не существует. В связи с этим важнейшим инструментом выработки разумной стратегии развития является моделирование. Процесс создания модели и собственно моделирование – это сложнейшие многоэтапные процессы. Сначала формулируется проблема, определяется объект моделирования, описывается внешняя среда, определяются управляющие переменные, структуры или система управления. Затем производится детальная разработка модели на основе декомпозиции каждой подсистемы, т.е. расчленение ее на составляющие подсистемы, объекты, элементы, и формального описания каждого объекта и элемента. После получения математических выражений и формул начинается этап определения численных значений параметров модели. Затем производится разработка компьютерной версии модели, планирование эксперимента, моделирование и анализ полученных результатов. Важным этапом моделирования является оценка адекватности модели и отладка программной реализации модели.

Общий вид модели банка и частные оптимизационные модели банка

Модель деятельности банка (модель банка) представляет собой совокупность математических выражений, посредством которых описываются взаимосвязи между переменными и параметрами, характеризующими финансово-экономическую деятельность банка.

Пусть x, z_1, z_2 - вектора входных, в том числе управляемых и неуправляемых переменных; v – вектор внутренних переменных; y – вектор выходных переменных; f, g, F – некоторые вектор-функции; R^n – n-мерное евклидово пространство.

Функции f, g, F можно рассматривать как отображения некоторой произвольной точки из множества аргументов в множество значений: $X \times Z \to V$; $V \to Y$; $X \times Z \to Y$.

Функционал F, отображающий входные переменные x, $z=(z_1,z_2)$, в выходные переменные y, являющийся суперпозицией функций g и f, т.е. $F(x,z)=g(f(x,z))$, будем называть оператором модели банка.

Тогда, с учетом введенных обозначений, общий вид модели банка можно представить следующим образом:

$$y=F(x,z_1,z_2). \qquad (6.1)$$

Таким образом, для построении модели банка необходимо:

- подобрать состав входных и выходных переменных;
- определить множество допустимых значений этих переменных;
- установить вид оператора модели;
- задать численные значения входных переменных.

Необходимо отметить, что данная форма представления модели банка не учитывает в явном виде в качестве независимой переменной – время. В тоже время, неявно, временной параметр может быть учтен путем представления процесса изменения исследуемых переменных в дискретной форме с помощью разностных уравнений.

Основные элементы оптимизационной модели банка

Полный перечень переменных банка как объекта моделирования достаточно велик. Отметим лишь наиболее важные группы переменных.

Среди входных переменных выделяются следующие группы:

- управляемые (контролируемые банком) переменные x.
- неуправляемые (неконтролируемые банком, экзогенные, независимые) переменные z, состоящие в свою очередь из двух подгрупп:
    - переменные, характеризующие воздействие внешней среды z_1 ;
    - неуправляемые случайные (стохастические) переменные z_2 .

Примерами управляемых банком переменных x могут служить объемы активов, пассивов, процентные ставки, структура финансовых ресурсов, распределение полученной прибыли, дивиденды и т.п.

К переменным, характеризующим воздействие внешней среды z_1 могут относится макроэкономические параметры, характеризующие инструменты финансово-кредитной политики, налоговые ставки и т.д.

Неуправляемые случайные переменные z_2 используются для описания состояния рыночной среды (состояния финансовых рынков), в которой действует банк, а также для описания динамики изменения депозитов (т.е. поведения потенциальных вкладчиков) и т.д.

Внутренние переменные (переменные состояния) v характеризуют состояние ресурсов банка (можно сказать ресурсов внешней среды, подвергающихся трансформации со стороны банка) в некоторый момент времени.

Выходные (эндогенные, зависимые) переменные y описывают результаты финансово-экономической деятельности банка за определенный период времени, например доходы и расходы банка.

Ограничения модели представляют собой записанные в математической форме условия, накладываемые на переменные модели и тем самым определяющие (явно или неявно) множества допустимых значений соответствующих переменных.

Можно сказать, что, за исключением одного основного (балансового) условия, все остальные ограничения могут конструироваться по-разному для каждого конкретного случая использования модели банка.

По своему содержанию такие ограничения можно объединить в следующие основные группы:

- юридические (правовые, нормативные) – устанавливаются на основе законодательных и иных нормативных актов государственных органов и нормативов ЦБ России; имеют обязательный характер для банка в целом;
- управленческие – формируются руководством банка самостоятельно и отражают стратегию и тактику управления банком; могут представлять собой форму задания некоторых целей банка;
- внешние (условия внешней среды) – устанавливаются банком самостоятельно на основе анализа и прогнозирования состояния внешней среды.

Оператор модели $F(x,z)$ в простейшем случае представляет собой систему алгебраических уравнений, связывающих входные и выходные переменные модели банка. В случае построения динамической и стохастической модели оператор будет иметь более сложную структуру, отражающую интегро-дифференциальные связи.

Целевая функция модели $\varphi(z,x,y)$ формируется в случае, когда в рамках исследуемой модели решается оптимизационная задача, заключающаяся в нахождении наилучших (оптимальных в некотором смысле) значений управляемых переменных x^*:

$$x^* = \arg\max(\min)\,\varphi(z,x,y).$$

Формирование целевой функции – одна из наиболее важных и сложных стадий процесса построения оптимизационной модели банка. Если оптимизационная модель банка описывает финансово-экономические аспекты банка, то в качестве целей банка можно, например, рассматривать:

- увеличение суммы собственного капитала банка;
- повышение эффективности использования финансовых ресурсов банка;
- уменьшение риска;
- обеспечение ликвидности банка.

При формировании целевой функции следует учитывать следующие моменты:

- банк может распределять только ту часть прибыли, которая останется после уплаты налогов (чистая прибыль);
- одинаковые объемы чистой прибыли, относящиеся к различным моментам времени, имеют для банка разную ценность;
- банк стремится получать устойчивую прибыль на протяжении длительной перспективы.

С учетом этих моментов более точным аналогом второй цели является «увеличение дисконтированной чистой прибыли от использования финансовых ресурсов банка в течение длительной перспективы».

Формирование целевых функций для риска и ликвидности – гораздо более сложный процесс, в силу менее конкретного содержания указанных понятий.

Под риском обычно понимают явление, заключающееся в наличии возможности отклонения реально полученных результатов финансово-экономической деятельности банка относительно их ожидаемых значений вследствие условий неопределенности.

Количественной мерой риска могут служить различные показатели:

- величина стандартного отклонения σ или дисперсии σ^2 полученных фактических значений некоторой случайной выходной величины y от ожидаемого значения $\bar{y}$;
- коэффициент вариации $\sigma/\bar{y}$.

Однако более конструктивным является подход, связанный с формированием такого скалярного минимизируемого критерия как дисперсия прибыли.

Другое, широко используемое понятие, - это ликвидность, которое определяет способность банка за счет имеющихся у него активов своевременно выполнять свои обязательства перед клиентами банка (в особенности – перед вкладчиками банка).

Из сказанного следует, что банку желательно иметь более ликвидные активы. Однако увеличение ликвидности активов имеет определенные границы, которые устанавливаются за счет анализа объемов востребуемых пассивов, т.е. той ее части, на покрытие которой реально могут потребоваться высоколиквидные активы.

Другим важным фактором, объективно ограничивающим величину высоколиквидных активов, является обратная, как правило, зависимость между ликвидностью и доходностью того или иного вида активов. Так, самый высоколиквидный актив (кассовая наличность) не приносит банку никаких доходов, в то время как процентные ставки по выданным банком долгосрочным кредитам обычно имеют наибольшие значения.

Параметры модели входят в состав ее ограничений, уравнений (оператора модели) и целевой функции. Параметры модели характеризуют свойства и структуру банка, остаются, как правило неизменными, на всем протяжении процесса моделирования или меняются по вполне определенному закону.

Типы оптимизационных моделей банка и алгоритмы решения оптимизационных задач средствами Excel

Проблема математического моделирования деятельности банка достаточна многообразна и включает в себя практически все типы моделей: статические и динамические, детерминированные и стохастические, микро- и макроэкономические. В рамках этих моделей возникает широкий спектр оптимизационных задач, охватывающих основные аспекты банковской деятельности. К числу таких задач (их иногда называют моделями) относятся задача оптимального управления портфелем банка и общая динамическая задача оптимального управления банковской деятельностью. Решение указанных задач осуществляется на основе методов математического программирования (линейного, нелинейного, стохастического), принципа максимума, метода динамического программирования а также методов векторной оптимизации. Для практической реализации указанных методов оптимизации необходимо разрабатывать специальное программное обеспечение. Вместе с тем целый ряд важных в практическом плане моделей и задач, которые находят применение в банковской деятельности, могут быть исследованы с использованием стандартного программного обеспечения Microsoft Excel 97. К числу таких моделей прежде всего следует отнести модель оптимизации банковского портфеля. Первые попытки применения теории портфелей к банковскому делу осуществлялись в форме линейных и квадратичных моделей программирования. Автор концепции управления портфелем Д.Ф. Синки иллюстрирует проблему с помощью модели линейного программирования. Конечно, чтобы свести реальность к двухмерной задаче, пришлось серьезно упростить постановку проблемы. Тем не менее, это полезно, так как позволяет понять смысл используемых методов и концепций.

6.2. Линейная модель планирования оптимальной системы портфелей банка

Представим баланс банка в следующей упрощенной форме:

$$\text{ЦБ} + \text{КР} = \text{ДВ} + \text{СД} + \text{К}, \tag{6.2}$$

где ЦБ — ценные бумаги; КР — кредиты; ДВ — депозиты до востребования; СД — срочные депозиты; К — собственный капитал.

Прибыль на ценные бумаги и прибыль по кредитам обозначены Пцб и Пкр соответственно. Издержки по привлечению депозитов и по капиталу предполагаются равными нулю. Отсюда прибыль банка

$$\text{Пр} = \text{Пцб}\ \ \text{ЦБ} + \text{Пкр}\ \ \text{КР}. \tag{6.3}$$

Уравнение называется целевой функцией. Проблема заключается в том, чтобы максимизировать эту функцию при следующих ограничениях.

1. Балансовое ограничение:

$$\text{ЦБ} + \text{КР} < 100. \tag{6.4}$$

2. Ликвидное ограничение:

$$\text{ЦБ} > 0{,}30\ (\text{ЦБ} + \text{КР}) \text{ или} \tag{6.5}$$

$$\text{ЦБ} > 0{,}43\ \text{КР}.$$

3. Кредитное ограничение:

$$\text{КР} > 35. \tag{6.6}$$

Цифровые значения заданы условно в млн. долл.

Нужно достичь наивысшего значения целевой функции, совместимой с областью допустимых решений. Сформулированная задача относится к классу задач линейного программирования. Рассмотрим последовательность действий, выполняемых при решении данной задачи с помощью *Excel*.

Алгоритм 1. Ввод данных для решения задачи линейного программирования

1. Для решения задачи сделать форму (рис. 6.1) и ввести текст, являющийся комментарием.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Имя							
3	Значение							
4	Нижн. Гр.							
5	Верхн. Гр.							
6	Коэф. ЦФ							
7								
8	Вид							
9	Балансовое							
10	Ликвидное							
11	Кредитное							
12								
13								

Рис. 6.1

2. Ввести исходные данные в форму (рис. 6.1).
3. Ввести зависимости из математической модели (6.3) – (6.6).

3.1. Ввести зависимости для целевой функции:

- Курсор в F6.
- Курсор на кнопку Мастер функций.
- **М1.**
  На экране: диалоговое окно Мастер функций – шаг 1 из 2.
- Курсор в окно Категория на категорию Математические.
- **М1.**
- Курсор в окно функции на СУММПРОИЗВ.
- **М1.**
- **Далее.**
  На экране: диалоговое окно Мастер функций – шаг 2 из 2.
- В массив 1 ввести: B$3:E$3.
  Заметим, что адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести.
- В массив 2 ввести: B6:E6.
- **Готово.**

3.2. Ввести зависимости для левых частей ограничений:

- Курсор в F6.
- **Копировать в буфер.**
- Курсор в F9.
- **Вставить из буфера.**
- Скопировать F9 в F10.

3.3. Ввести дополнительные зависимости для левых частей:

- Курсор в F11.

- Согласно п. 3.1 с использованием функции СУММПРОИЗВ ввести выражение: =0,3*СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)-B$3.
- Курсор в F13.
- Согласно п. 3.1 с использованием функции СУММПРОИЗВ, ввести выражение: =СУММПРОИЗВ(D$3:E$3;B10:E10)-B17.
- Курсор в F14.
- Ввести: =D3.
- Курсор в F15.
- Ввести: =E3.

3.3. Ввести значения и зависимости для правых частей ограничений:

- Курсор последовательно устанавливать в ячейки B10, B11, B14, B15 и ввести в них значения согласно таблице (рис. 6.1).
- В ячейку B9 ввести: =B17.
- В ячейку B13 ввести: =H14+H15+B17.

Алгоритм 2. Работа в диалоговом окне Поиск решения

1. **Сервис, Поиск решения…**

На экране: диалоговое окно Поиск решения.

2. Назначить целевую функцию:
   - Курсор в окно Установить целевую ячейку.
   - Ввести адрес F6: $F$6.
   - Ввести направление целевой функции: Максимальному значению.
3. Ввести адреса искомых переменных:
   - Курсор в поле Изменить.
   - Ввести адреса B3:E3: $B$3:$E3.
4. **Добавить…**

На экране: диалоговое окно Добавление ограничения.

5. Ввести ограничения:

В окне Ссылка на ячейку установить курсор и ввести мышкой адрес ячейки F9:$F$9.

Курсор на стрелку.

М1.

Курсор на знак. Установить знак ограничения < согласно таблице (рис. 6.1).

М1.

Курсор в правое окно.

Ввести адрес ячейки H9: =$H$9.

Добавить…

Аналогично ввести остальные ограничения.

После ввода последнего ограничения вместо слова **Добавить…** ввести **ОК.**

На экране: диалоговое окно Поиск решения с введенными условиями.

Если при вводе задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений, то это делается с помощью команд **Изменить…, Удалить.**

На этом ввод условий задачи заканчивается.

2. Решение задачи

Решение задачи производится сразу же после ввода данных по предыдущему алгоритму, когда на экране находится диалоговое окно Поиск решения.

Алгоритм 3. Решение задачи линейного программирования

1. **Параметры…**

На экране: диалоговое окно Параметры поиска решения.

Параметры – Максимальное время, Предельное число итераций, Относительная погрешность, Допустимое отклонение – можно установить по умолчанию, что подходит для большинства решаемых задач.

2. Установить флажок Линейная модель, что обеспечивает применение симплекс-метода.

3. **ОК.**

На экране: диалоговое окно Поиск решения.

4. **Выполнить.**

На экране: диалоговое окно Результаты поиска решения. Решение найдено и результаты оптимального решения приведены в таблице (рис. 6.1).

Однако решение задачи находится не всегда. Если условия задачи несовместны, то на экране появляется диалоговое окно с надписью Поиск не может найти подходящего решения. Если целевая функция не ограничена, то на экране появится диалоговое окно с надписью Значения целевой ячейки не сходятся. В этих случаях необходимы специальные действия по корректировке исходной модели.

В других случаях (нарушение условий линейности и т.п.) следует искать ошибки в модели или на этапах ввода зависимостей и исходных данных модели.

3. Графическое представление результатов решения

Важным фактором, помогающим принять оптимальное решение, является наглядное представление полученных результатов.

Алгоритм 4. Построение встроенной диаграммы.

1. Выделить B3:E3, т.е. те ячейки, значения которых должны быть представлены на диаграмме.
2. Курсор на кнопку Мастер диаграмм.
3. **М1.**
4. Курсор в угол области, выделяемой для размещения диаграммы.
   МН протащить для создания области, к которых будет построена диаграмма.
   На экране: диалоговое окно Мастер диаграмм – шаг 1.
5. **Далее.**
   На экране: диалоговое окно Мастер диаграмм – шаг 2.
6. Курсор на выбранный тип диаграмм. В нашем случае – гистограммы.
7. **Далее.**
   На экране: диалоговое окно Мастер диаграмм – шаг 3. Назначается формат типа диаграмм.
8. Выбираем формат 2.
9. **Далее.**
   На экране: диалоговое окно Мастер диаграмм – шаг 4. На этом шаге назначается вариант представления рядов данных. Кроме того, назначается число строк и столбцов, данные в которых являются метками по осям.
10. **Далее.**

На экране: диалоговое окно Мастер диаграмм – шаг 5. На этом шаге можно ввести легенду, а также названия диаграммы и осей.

11. **Готово.**

На экране: встроенная диаграмма с маркерами, показанная на рис. 2.

4. Анализ оптимального решения

Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется окно Результаты поиска решения. Решение найдено. С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчеты трех типов:

Результаты;
Устойчивость;
Пределы.

Отчет по результатам

Отчет состоит из трех таблиц:

Таблица 1 приводит сведения о целевой функции до начала вычислений и в результате решения задачи.

Таблица 2 приводит значения искомых переменных, полученных в результате решения задачи.

Таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений.

Отчет по устойчивости

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц.

В таблице 1 приводятся следующие значения для переменных:

- результат решения задачи;
- редуц. стоимость, т.е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение;
- коэффициенты целевой функции;
- предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

В таблице 2 приводятся аналогичные значения для ограничений:

- величина использованных ресурсов;
- теневая цена, т.е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу;
- значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Отчет по пределам

В нем показано, в каких пределах могут изменятся искомые переменные, вошедшие в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

При заданных Пкр=0,15 и Пцб=0,10 и отсутствии резервных требований (Р=0) получим оптимальное решение [ЦБ*, КР*] равное [30, 70]. Оптимальный доход при этом будет: Пр*=0,15(70)+0,10(30)=13,5.

Заметим, что пока Пкр > Пцб эффективная совокупность решений будет определятся ликвидным ограничением (т.е., 0,3 [100] = 30). Если Пкр< Пцб, тогда оптимальное решение будет подчинено кредитному ограничению [65, 35]. (Задание – проверить)

Портфельные ограничения: налоговый эффект резервных требований

Предположим, что финансовая структура банка [ДВ+СД+К] = [50+42+8] и что резервные требования по ДВ и СД равны, соответственно, 10% и 5%, т.е. так как это задано в представленной на рис. 1 модели. Балансовое ограничение будет:

$Р + ЦБ + КР \le 100$ или $ЦБ + КР \le 100 – Р$,

где сумма резервов Р = 0,10(50) + 0,15(42) = 7,1. В этой ситуации оптимальное решение будет [28, 65] и Пр*=12,5, т.е. такое какое получено при решении исходной задачи. Снижение Пр* от 13,5 до 12,5 представляет выплачиваемый банком неявный налог. При требуемых резервах банк мог бы смягчить свои ограничения по ликвидности и переместить часть средств в более доходные активы, чтобы уменьшить налоговое давление резервных требований. Например, если ликвидное ограничение смягчается до 0,20(ЦБ+КР), новая совокупность решений будет [19,74] и Пр*=13, т.е. налоговое бремя будет уменьшено на 0,5. (Задание – проверить).

Управление пассивами и требования ликвидности

Предположим, что управляя пассивами банк в состоянии увеличить объем срочных депозитов, на которые распространяется требование о 5%-ном резерве, на 20 млн. $. (Задание). Как это изменение отразится на решении и что можно сказать о готовности банка платить за дополнительные фонды?

Учитывая резервные требования к дополнительным фондам, ограничение по прибыльным активам составит $ЦБ + КР \le 119$ и решение будет [35,7; 83,3], где 35,7=0,3(119). Поскольку соответствующее значение Пр*=16,1, прирост фондов принесет дополнительный доход (16,1 – 13,5 = 2,6) при валовой прибыли на всю совокупность активов (2,6/20 = 13%). (доход на прибыльные активы будет (2,6/19 = 13,68%). Если банк имеет целевой показатель прибыли к объему капитала 1% и издержки производства 1%, то с учетом 0,55% отчислений в резервный фонд он должен платить за фонды не более чем 10,45%. Действительная величина издержек на фонды, для которых установлены резервные требования, равны номинальным издержкам деленным на (1 – резервное требование). В этом случае 10,45% : (1 – 0,05) = 11%. В общем, валовый доход в 13% должен будет покрывать следующие издержки:

Процентные издержки на фонды	10,45%
Обязательные 5% отчисления в резервный фонд	0,55%
Накладные расходы (издержки производства)	1,00%
Отчисления в фонд прибыли	1,00%
Валовый доход	13,00%

Теперь рассмотрим ликвидное ограничение как функцию отношения стабильных депозитов к сумме всех депозитов и примем, что дополнительные фонды суть стабильные (сердцевинные) депозиты. Поскольку теперь отношение стабильных депозитов ко всем депозитам выросло, предположим, что менеджер, управляющий ликвидностью, может спокойно уменьшить ликвидное ограничение с 0,30 до 0,25. Отсюда $ЦБ \ge 0,25(ЦБ + КР)$. Новое решение будет [29,75; 89,25] и Пр*=16,4. (Задание - проверить). При смягченном ликвидном ограничении валовый доход по приросту депозитов будет (2,9/20=14,5%). Теперь банк, при прочих равных условиях, может платить за средства 11,87%.

Риск ликвидности: стабильные депозиты и привлеченные фонды

Предположим, что увеличение баланса до 120 обеспечено с помощью «горячих» денег, а не стабильных депозитов. В этом случае ликвидное ограничение следует не смягчать, а скорее, ужесточать – из-за повышения потенциала изменчивости депозитов. Для иллюстрации предположим, что ликвидное ограничение увеличено до $ЦБ \ge 0,32(ЦБ + КР)$. В этой ситуации «горячих» денег (т.е. с более жестким ликвидным ограничением) решение будет [38; 81] (в округленных данных), что дает Пр*=15,9. Предельный доход на дополнительные средства составит только (2,4/20=12%). При прежних издержках и отчислениях в фонд прибыли банк может платить за дополнительные фонды только 9,50%.

Из этого примера ясно существование обратного отношения между ликвидностью и доходом, а также видна важность увязки ликвидных требований и со структурой депозитов.

Анализ внебалансовых видов деятельности

Вернемся к исходному набору решений [30, 70] и Пр*=13,5. Предположим, что вместо наращивания баланса банк обратился к внебалансовой деятельности, которая приносит ему 1,5 дохода в виде комиссионных за услуги, и увеличивает его валовый доход до 15. Как уже отмечалось, внебалансовая деятельность часто принимает форму аккредитивов, кредитных линий и обязательств. Поскольку все эти виды деятельности не могут быть вариантом одних только прибылей без всякого риска, нужно оценить их риск. В рамках нашей простой модели оценка может принять форму повышенных ликвидных требований. Предположим, что необходимый для получения комиссионного дохода в 1,5 уровень внебалансовой деятельности делает необходимым установление для балансовых активов коэффициента ликвидности 0,33 (т.е. ЦБ $\geq$ 0,33 (ЦБ +КР). При этом оптимальным решением становится набор [33, 77], доход от балансовых активов уменьшается с 13,5 до 13,35. При неизменном комиссионном доходе 1,5 новый валовый доход снизится с 15 до 14,85. В этом примере цена риска по внебалансовой деятельности (отнесенная косвенно, через повышенные требования ликвидности) равна 10% от комиссионного дохода (0,10 = 0,15/1,5). Портфельный или балансовый эффект от ограничений по внебалансовой деятельности сказывается в том, что банку приходится держать более безопасную или более ликвидную группу активов. Риск внебалансовых видов деятельности компенсируется сокращением дохода по балансовым активам. Но, по крайней мере в примере, банк при этом выигрывает.

Альтернатива «риск – доход»

Для управления финансами чрезвычайно важна концепция взамозависимости «риск – доход»: чтобы повысить прибыльность инвестору приходится принимать больший риск. Это положение, конечно, относится и к банковским менеджерам. Закон, однако, ограничивает возможности банков стремится к более высоким доходам (т.е. идти на больший риск). Ограничений очень много. Например, запрещается владеть некоторыми активами (скажем, обычными акциями), банки обязаны диверсифицировать кредитные портфели, избегая чрезмерной концентрации кредита отдельным заемщикам, ограничивается или запрещается выдавать высокорисковые кредиты. Но при всевозможных ограничениях все еще приходится делать выбор между ростом доходов и ростом риска. При этом используются модели и задачи нелинейного программирования и многокритериальной оптимизации, о которых речь пойдет ниже.

6.3. Модель нелинейного программирования

Из всей совокупности методов исследования и планирования операций коммерческого банка финансистам-аналитикам наиболее доступны методы линейного и нелинейного оптимального математического программирования. Эти программы поставляются вместе с популярным пакетом *Excel*.

Решение многокритериальных задач также основано на методах линейного и нелинейного программирования, т.к. основано на том, что один из критериев задается в виде целевой функции, подлежащей оптимизации. Для остальных целей выбираются какие-либо приемлемые значения, которые задаются в виде ограничений. Покажем, как учет реальных ограничений приводит к модели линейного и нелинейного программирования.

Вначале остановимся более подробно на экономических нормативах Инструкции №1 ЦБ России.

1. Норматив достаточности капитала (HI) определяется как отношение собственных средств (капитала) кредитной организации к суммарному объему активов, взвешенных с учетом риска контрагентов.

Собственные средства (капитал) кредитной организации, используемые при расчете обязательных экономических нормативов, определяются как сумма уставного капитала, фондов кредитной организации и нераспределенной прибыли, уменьшенная на затраты капитального характера, допущенные убытки, выкупленные собственные акции и дебиторскую задолженность длительностью свыше 30 дней.

В целях приведения уровня достаточности капитала в соответствие с международными стандартами минимально допустимое значение норматива $H1$(в %) устанавливается в размере:

с баланса на 01.07.96 г. — 5;
с баланса на 01.02.97 г. — 6;
с баланса на 01.02.98 г. — 7;
с баланса на 01.02.99 г. — 8.

Вместе с тем для кредитных организаций, не обеспечивших выполнение установленного на 01.07.96 г. значения норматива, на период до 01.07.97 г. определяется следующий порядок регулирования их деятельности. Главные управления (национальные банки) ЦБР устанавливают квартальные значения норматива Н1таким образом, чтобы постепенно (равными долями) от фактически сложившегося значения на 01.07.96 г. (но не ниже 4%) привести значение данного норматива к 6% по балансу на 01.07.97 г.

Представим в нашей модели ограничение по этому нормативу в виде неравенства

$$H1 = \frac{OwCp}{\sum_{a=1}^{n} A_a \times R_a} 100\% \geq B1, \tag{6.7}$$

где $OwCp$ — собственный капитал *(own capital)* банка;

R_a — нормативный коэффициент риска для каждого типа актива по Инструкции № 1 ЦБР;

$B1$ — минимально допустимая величина $H1$. Например, согласно вышеприведенным значениям для 1996 г. $B1$=5%, т.е. собственный капитал банка должен составлять не менее 5% суммы активов, взвешенных коэффициентами риска R. Для 1997 г. $B1=6\%$ и т.д.

Под ликвидностью кредитной организации понимается способность организации обеспечивать своевременное выполнение своих обязательств. Для контроля за состоянием ликвидности кредитной организации устанавливаются нормативы ликвидности (текущей, мгновенной и долгосрочной).

Нормативы ликвидности кредитных организаций определяются как соотношение между:

- активами и пассивами с учетом сроков, сумм и типов активов и пассивов и других факторов;
- ликвидными активами (наличными денежными средствами, средствами до востребования, краткосрочными ценными бумагами, другими легкореализуемыми активами) и суммарными активами.

2. Норматив текущей ликвидности (Н2) представляет собой отношение суммы ликвидных активов банка к сумме обязательств банка по счетам до востребования и на срок до 30 дней.

Ликвидные активы — это средства на счетах до востребования, кредиты и др., выданные со сроком погашения в течение ближайших 30 дней.

Обязательства до востребования и на срок до 30 дней — это вклады и депозиты с истекающим сроком до одного месяца, выпущенные собственные векселя со сроками предъявления до 30 дней, 50% гарантий и поручительств, выданных кредитной организацией, со сроком исполнения обязательств в течение ближайших 30 дней.

Минимально допустимое значение норматива Н2 устанавливается в размере (в %):

с баланса на 01.07.96 г. — 20;
с баланса на 01.02.97 г. — 30;
с баланса на 01.02.98 г. — 50;
с баланса на 01.02.99 г. — 70.

Ограничения норматива представим в форме

$$H2 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,la}}{\sum_{l=1}^{m} L_{l,d30}} 100\% \geq B2, \tag{6.8}$$

где la — признак ликвидного актива;

$d30$ — признак пассивов до востребования со сроком погашения до 30 дней;

$B2$ — предельное значение $H2$ на определенный год. Например, в 1996 г. ликвидные активы должны покрывать не менее 20% обязательств со сроком погашения до 30 дней.

3. Норматив мгновенной ликвидности (Н3) представляет собой отношение суммы высоколиквидных активов банка к сумме обязательств банка по счетам до востребования. Высоколиквидные активы — это денежные средства и средства на счетах до востребования. Обязательства по счетам до востребования — это вклады и депозиты до востребования и выпущенные кредитной организацией собственные векселя до востребования.

Минимально допустимое значение норматива Н3 устанавливается в размере (в %):

с баланса на 01.07.96 г. — 10;
с баланса на 01.02.97 г. — 20.

Ограничения норматива представим в форме

$$H3 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,bliq}}{\sum_{l=1}^{m} L_{l,vct}} 100\% \leq B3, \tag{6.9}$$

где $bliq$ — признак высоколиквидного (*biq liqudity)* актива;

vct — признак пассивов до востребования;

$B3$ — предельное значение $H3$ на определенный год. Например, в 1996 г. высоколиквидные активы должны покрывать не менее 10% обязательств до востребования.

4. Норматив долгосрочной ликвидности (Н4) представляет собой отношение выданных кредитной организацией кредитов со сроком погашения свыше года к капиталу кредитной организации, а также обязательствам кредитной организации по депозитным счетам, полученным кредитам и другим долговым обязательствам на срок свыше года.

Максимально допустимое значение норматива Н4 устанавливается в размере 120%.

Ограничения норматива представим в форме

$$H4 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,y}}{OwCp + \sum_{l=1}^{m} L_{l,y}} 100\% \le B4, \qquad (6.10)$$

где y — признак кредитов, выданных с оставшимся сроком до погашения свыше года, 50% гарантий и поручительств, выданных кредитной организацией, со сроком действия свыше года, а также признак обязательств кредитной организации по депозитным счетам, кредитам, полученным кредитной организацией, и обращающимся на рынке долговым обязательствам со сроком погашения свыше года;

$B4$ — предельное значение $H4$, равное 120%.

5. Минимально допустимое значение соотношения ликвидных активов и суммарных активов кредитной организации (Н5) устанавливается в размере (в %):

с баланса на 01.07.96 г. — 10;

с баланса на 01.02.97 г. — 20.

Ограничения норматива представим в форме

$$H5 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,la}}{A} 100\% \ge B5, \qquad (6.11)$$

где $B5$ — минимально допустимое значение норматива Н5 на определенный год.

6. Максимальный размер риска на одного заемщика или группу связанных заемщиков (Н6) устанавливается в процентах от собственных средств (капитала) кредитной организации.

При определении размера риска учитывается совокупная сумма кредитов, выданных кредитной организацией данному заемщику или группе связанных заемщиков, а также гарантий и поручительств, предоставленных кредитной организацией одному заемщику (группе связанных заемщиков).

Эти требования, т.е. активы, взвешиваются по степени риска как для норматива Н1.

Максимально допустимое значение норматива Нб устанавливается в размере (в %):

с баланса на 01.07.96 г. — 60;

с баланса на 01.02.97 г. — 40;

с баланса на 01.02.98 г. — 25.

Ограничения этого норматива в модель планирования портфелей включать нецелесообразно, поскольку они носят индивидуальный характер и контролируются во время оформления конкретного кредита.

7. Максимальный размер крупных кредитных рисков (Н7) устанавливается как процентное соотношение совокупной величины крупных кредитных рисков и собственных средств (капитала) кредитной организации.

Совокупная сумма требований, взвешенных с учетом риска к одному заемщику (или группе связанных заемщиков) кредитной организации с учетом 50% сумм забалансовых требований (гарантий, поручительств), имеющихся у кредитной организации в отношении одного заемщика (или группы связанных заемщиков), превышающая 5% капитала кредитной организации, рассматривается в качестве крупного кредита. Решение о выдаче крупных кредитов должно в обязательном порядке приниматься правлением банка либо его кредитным комитетом с учетом заключения кредитного отдела банка. Решение о выдаче должно быть оформлено соответствующими документами.

Сведения о крупных кредитах ежемесячно представляются в Главное управление (национальный банк) ЦБР по месту нахождения корреспондентского счета

Устанавливается, что совокупная величина крупных кредитов, выданных кредитной организацией, включая взаимосвязанных заемщиков, с учетом 50% забалансовых требований (гарантий, поручительств) не может превышать размер капитала кредитной организации более чем:

в 1996 г. — в 12 раз;
в 1997 г. — в 10 раз;
в 1998 г. — в 8 раз.

Об ограничениях этого норматива см. п. 6.

8. Максимальный размер риска на одного кредитора (вкладчика) (Н8) устанавливается как процентное соотношение совокупной суммы обязательств кредитной организации по вкладам, полученным кредитам, гарантиям и поручительствам (50%), остаткам по расчетным, текущим счетам и счетам по операциям с ценными бумагами одного или взаимосвязанных кредиторов (вкладчиков) и собственных средств кредитной организации.

Максимально допустимое значение норматива 148 устанавливается в размере (в %):

с баланса на 01.07.96 г. — 60;
с баланса на 01.02.97 г. — 40;
с баланса на 01.02.98 г. — 25.

Об ограничениях этого норматива, см. п. 6

9. Максимальный размер кредитов, гарантий и поручительств, предоставленных банком своим участникам (акционерам) (Н9), соотносится с капиталом банка.

Максимально допустимое значение норматива *Н*9 устанавливается в размере (в %):

с баланса на 01.07.96 г. — 60;
с баланса на 01.10.96 г. — 40;
с баланса на 01.01.97 г. — 20.

При этом совокупная величина кредитов, выданных акционерам (пайщикам) кредитной организации, не может превышать с 1 января 1998 г. 50% собственных средств (капитала) банка.

Об ограничениях этого норматива см. п. 6.

10. Максимальный размер кредитов, гарантий и поручительств, предоставленных кредитной организацией своим инсайдерам (Н10), зависит от многих конкретных обстоятельств.

Об ограничениях этого норматива см. п. 6.

11. Максимальный размер привлеченных денежных вкладов (депозитов) населения (Н11) устанавливается как процентное соотношение общей суммы денежных вкладов (депозитов) граждан и величины собственных средств (капитала) банка.

Ограничениях этого норматива зададим формулой

$$H11 = \frac{\sum_{l=1}^{m} L_{l,ppl}}{OwCp} 100\% \le B11, \tag{6.12}$$

где *ppl* — признак вкладов населения *(population)* в пассивах. Максимально допустимое значение (*В*ll) норматива *Н*11 устанавливается в размере 100%. Вклады населения в рублях и иностранной валюте не должны превышать собственного капитала банка.

12. Норматив использования собственных средств кредитных организаций для приобретения долей (акций) других юридических лиц (Н12) устанавливается в форме процентного соотношения размеров инвестируемых и собственных средств кредитной организации.

Максимально допустимое значение норматива Н12 устанавливается в размере (в %):

с баланса на 01.07.96 г. — 45;
с баланса на 01.10.96 г. — 35;
с баланса на 01.01.97 г. — 25.

При этом собственные средства кредитной организации, инвестируемые на приобретение долей (акций) одного юридического лица (Н12.1), не могут превышать 10% капитала банка.

Ограничения норматива зададим формулой

$$H12 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,sbr}}{OwCp} 100\% \le B12, \tag{6.13}$$

где *sbr* — признак акций *(share)* корпораций в активах;

*B*12 — максимально допустимое значение норматива *H*12. Например, в первой половине 1996 г. сумма акций корпораций не должна была превышать 45% собственного капитала банка.

13. Норматив риска собственных вексельных обязательств (*H*13) введем формулой

$$H13 = \frac{\sum_{l=1}^{n} L_{l,owb}}{OwCp} 100\% \le B13, \tag{6.14}$$

где *owb* — признак собственных вексельных обязательств *(own bills)* в пассивах (выпущенные кредитными организациями векселя и банковские акцепты + 50% забалансовых обязательств кредитной организации).

Максимально допустимое значение (В13) норматива Н13 устанавливается в размере (в %):
с баланса на 01.10.96 г. — 200;
с баланса на 01.03.97 г. — 100.

Для вновь создаваемых кредитных организаций, отработавших шесть месяцев с момента регистрации, устанавливаются следующие значения обязательных экономических нормативов (в %):

НI — минимально 8; Н8 — максимально 25;
Н2 — минимально 70; Н9 — максимально 20;
НЗ — минимально 20; Н9.1 — максимально 50;
Н4 — максимально 120; Н10 — максимально 2;
Н5 — минимально 20; Н11 — максимально 100;
Нб — максимально 25; Н12 — максимально 25;
Н7 — 8 раз; Н12.1 — максимально 10;
Н13 — максимально 100.

ЦБ России постоянно совершенствует систему нормативов. По мере поступления новых нормативов или исключения старых можно модифицировать систему ограничений модели согласно изложенной методике.

Собственные и технологические ограничения

Для задач математического программирования характерно использование технологических ограничений в виде неотрицательности переменных.

Введем эти ограничения как

$$A_a \ge 0, \tag{6.15}$$

$$L_l \geq 0,$$

т.е. активы и пассивы не могут принимать отрицательные значения.

Во время плановых расчетов необходимо также соблюдать балансовое ограничение

$$A \leq OwCp + L, \tag{6.16}$$

показывающее, что сумма активов не может быть больше суммы пассивов, т.е. капитала и обязательств.

Помимо нормативных ограничений ЦБР на показатели работы банков каждый банк в процессе управления операциями определяет собственные лимиты (ограничения) деятельности и составляющих портфелей активов и пассивов.

Внешние ограничения в виде обязательных нормативов, устанавливаемых ЦБР, ни в коей мере не гарантируют развития отдельно взятого банка. Банки вынуждены создавать целую систему внутренних лимитов. Структура лимитов банка отражает уровень риска, который руководство банка готово принять на себя при изменении конъюнктуры рынка и поведения контрагентов.

Из соображений удобства компьютерной реализации представим собственные лимиты банка двусторонними неравенствами для каждого инструмента:

$$\begin{aligned} A_{a,\min} &\leq A_a \leq A_{a,\max}, \\ L_{l,\min} &\leq L_l \leq L_{l,\max}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

При необходимости можно ввести и групповые ограничения.

Оценка модели показывает, что задача планирования оптимальной системы портфелей банка может быть сформулирована как стандартная задача нелинейного программирования. Критерий линеен, ограничения экономических нормативов нелинейны из-за операции деления показателей. Выполнив преобразование ограничений экономических нормативов ЦБ России избавившись от операции деления можно привести ограничения к линейной форме.

Предполагается, что задачу можно решить с помощью стандартных программ линейной и нелинейной оптимизации.

Опыт моделирования показал, что использование нелинейной модели и соответствующего нелинейного алгоритма существенно увеличивает время поиска оптимального решения. Кроме того, стандартные программы оптимизации имеют разное число ограничений для управляемых (экзогенных) и производных переменных, т.е. переменных (эндогенных). Число эндогенных ограничений намного меньше. В нелинейной форме задачи *Solver Excel* позволяет использовать всего лишь около 40 инструментов в портфелях. Этого достаточно для академических задач. В линейной форме можно ввести в портфели 200 инструментов и решать не только учебные задачи, но и задачи бизнес-планирования в коммерческом банке.

Контрольные вопросы

(выберете правильный ответ)

1. Основные элементы оптимизационной модели банка?

   а) ограничения;

   б) переменные;

   в) 1) переменные (входные: управляемые и неуправляемые; выходные; внешние и внутренние); 2) ограничения; 3) целевая функция; 4) параметры;

   г) целевая функция;

   д) параметры.

2. Целевая функция функция и балансовые ограничения линейной модели планирования оптимальной системы портфелей банка?

   а) ЦБ + КР = ДВ + СД + К ;

   б) Пр = Пцб ЦБ + Пкр КР ; ЦБ + КР = ДВ + СД + К ;

в) Пр = Пцб ЦБ + Пкр КР;

г) $x^* = \arg\max(\min)\varphi(z,x,y)$;

д) ***y=F(x,z₁,z₂).***

3. Норматив достаточности капитала *Н1*?

а) $H1 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,y}}{OwCp + \sum_{l=1}^{m} L_{l,y}} 100\% \le B4$;

б) $H1 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,la}}{\sum_{l=1}^{m} L_{l,d30}} 100\% \ge B2$;

в) $H1 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,sbr}}{OwCp} 100\% \le B12$;

г) определяется как отношение собственных средств (собственного капитала) кредитной организации к суммарному объему активов, взвешенных с учетом риска $H1 = \frac{OwCp}{\sum_{a=1}^{n} A_a \times R_a} 100\% \ge B1$;

д) $H1 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,bliq}}{\sum_{l=1}^{m} L_{l,vct}} 100\% \le B3$.

4. Норматив *Н2* ?

а) представляет собой отношение суммы ликвидных активов банка к сумме обязательств банка по счетам до востребования и на срок до 30 дней $H2 = \frac{\sum_{a=1}^{n} A_{a,la}}{\sum_{l=1}^{m} L_{l,d30}} 100\% \ge B2$.

б) представляет собой отношение суммы высоколиквидных активов банка к сумме обязательств банка по счетам до востребования.

в) представляет собой отношение выданных кредитной организацией кредитов со сроком погашения свыше года к капиталу кредитной организации, а также обязательствам кредитной организации по депозитным счетам, полученным кредитам и другим долговым обязательствам на срок свыше года.

г) устанавливается в форме процентного соотношения размеров инвестируемых и собственных средств кредитной организации.

д) устанавливается как процентное соотношение совокупной величины крупных кредитных рисков и собственных средств (капитала) кредитной организации.

5. Предположим, что финансовая структура банка [ДВ+СД+К] = [50+42+8] и что резервные требования по ДВ и СД равны, соответственно, 10% и 5%. Балансовое ограничение принять Р + ЦБ + КР $\le$ 100 или ЦБ + КР $\le$ 100 – Р, где Р - сумма резервов. Определить оптимальное решение?

а) [28,60] и Пр*=12,5;
б) [28,65] и Пр*=10,5;
в) [20,80] и Пр*=12,5;
г) [38,55] и Пр*=11,5;
д) [28,65] и Пр*=12,5.

6. При требуемых резервах банк мог бы смягчить свои ограничения по ликвидности и переместить часть средств в более доходные активы, чтобы уменьшить налоговое давление резервных требований. Например, если ликвидное ограничение смягчается до 0,20 (ЦБ + КР), какой будет новая совокупность решений и что произойдет с налоговым требованием?
   а) [19,74] и Пр*=13,5 т.е. налоговое бремя будет уменьшено на 1;
   б) [19,74] и Пр*=13, т.е. налоговое бремя будет увеличено на 0,5;
   в) [28,65] и Пр*=12,5 т.е. налоговое бремя не изменится;
   г) [19,74] и Пр*=15, т.е. налоговое бремя будет увеличено на 2,5;
   д) [19,74] и Пр*=13 т.е. налоговое бремя будет уменьшено на 0,5.
7. Предположим, что управляя пассивами банк в состоянии увеличить объем срочных депозитов, на которые распространяется требование о 5%-ном резерве, на 20 млн. долл. Как это изменение отразится на решении и что можно сказать о готовности банка платить за дополнительные фонды?
   а) [35,7; 83,3] и Пр*=15,1; банк будет в состоянии покрыть совокупные издержки, которые составят 12%;
   б) [35,7; 83,3] и Пр*=16,1; банк будет не в состоянии покрыть совокупные издержки, которые составят 17%;
   в) [30,7; 88,3] и Пр*=16,1; банк будет в состоянии покрыть совокупные издержки, которые составят 13%;
   г) [35,7; 83,3] и Пр*=16,1; банк будет в состоянии покрыть совокупные издержки, которые составят 13%;
   д) [35,7; 83,3] и Пр*=15,1; банк будет не в состоянии покрыть совокупные издержки, которые составят 16,1%.

8. В условиях предыдущего задания, рассмотрим ликвидное ограничение как функцию отношения стабильных депозитов к сумме всех депозитов и примем, что дополнительные фонды суть стабильные депозиты. Поскольку теперь отношение стабильных депозитов ко всем депозитам выросло, предположим, что менеджер, кправляющий ликвидностью, может уменьшить ликвидное ограничение с 0,30 до 0,25. Найти новое решение и определить, сколько банк может платить за средства и валовый доход банка?
   а) [29,75; 89,25] и Пр*=15,4; процентные издержки на фонды (плата за средства) 11,87%; валовый доход 14,5%;
   б) [29,75; 89,25] и Пр*=16,4; процентные издержки на фонды (плата за средства) 10,87%; валовый доход 14,5%;
   в) [29,75; 89,25] и Пр*=16,4; процентные издержки на фонды (плата за средства) 11,87%; валовый доход 14,5%;
   г) [29,75; 89,25] и Пр*=16,4; процентные издержки на фонды (плата за средства) 10,87%; валовый доход 16,5%;
   д) [28,75; 90,25] и Пр*=16,4; процентные издержки на фонды (плата за средства) 11,87%; валовый доход 14,5%;
9. Предположим, что увеличение баланса до 120 обеспечено с помощью горячих денег, а не стабильных депозитов. В этом случае ликвидное ограничение следует ужесточать, из-за повышения изменчивости депозитов. Предположим, что принято решение увеличить ликвидное ограничение до ЦБ $\geq$ 0,32 (ЦБ + КР). Как это отразится на решении? Чему равен

предельный доход на дополнительные средства? Сколько банк может платить за дополнительные фонды при прежних издержках?

а) [38; 82] и Пр*=15,9; предельный доход на дополнительные средства составит 12%; плата за дополнительные фонды 9,50%;

б) [38; 82] и Пр*=15,9; предельный доход на дополнительные средства составит 11%; плата за дополнительные фонды 9,50%;

в) [38; 82] и Пр*=16,9; предельный доход на дополнительные средства составит 12%; плата за дополнительные фонды 9,50%;

г) [38; 82] и Пр*=15,9; предельный доход на дополнительные средства составит 12%; плата за дополнительные фонды 10,50%;

д) [35; 85] и Пр*=15,9; предельный доход на дополнительные средства составит 12%; плата за дополнительные фонды 9,50%.

10. Предположим, что вместо наращивания баланса, банк обратился к внебалансовой деятельности, которая приносит ему 1,5 дохода в виде комиссионных за услуги. Предположим, что необходимый для получения комиссионного дохода в 1,5 уровень внебалансовой деятельности делает необходимым установление для балансовых активов коэффициента ликвидности 0,33. Каково будет оптимальное решение и цена риска по внебалансовой деятельности?

а) [30; 70] и Пр*=13,35; цена риска 10% от комиссионного дохода;

б) [33; 77] и Пр*=13,35; цена риска 12% от комиссионного дохода;

в) [35; 75] и Пр*=13,5; цена риска 10% от комиссионного дохода;

г) [33; 77] и Пр*=13,35; цена риска 10% от комиссионного дохода;

д) [33; 77] и Пр*=13,5; цена риска 10% от комиссионного дохода.

ТЕМА 7. ТИПЫ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ БАНКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

7.1. Оптимизационные модели банка

Классификация и классифицирующие признаки оптимизационных моделей банка.

Классификация моделей банка может быт проведена исходя из той роли и тех функций, которые выполняет банк:

- экономико-математические модели банка, трактующие его деятельность с точки зрения выполнения функций финансового посредничества;
- система производственно-организационных моделей и методов, основанных на представлении банка как некоторого объекта, характеризующегося входными и выходными параметрами;
- модели, позволяющие исследовать закономерности динамики различных финансовых ресурсов банка, включая совокупность стохастических финансовых потоков.

7.1.1. Модели банка как финансового посредника

Большая часть теоретических подходов в банковской сфере посвящена экономико-математическим моделям банков, в которых их деятельность трактуется с точки зрения выполнения функций финансового посредничества.

Финансовый посредник – это экономический агент, специализирующийся на покупке и продаже (совершаемых как правило параллельно во времени) финансовых контрактов и ценных бумаг.

Заметим, что такое определение, с одной стороны, достаточно хорошо отражает сущность и задачи данного финансового института, но, с другой, - мало чем отличается от определения посредника, работающего в сфере промышленности или торговли.

Приведенное определение является весьма общим. Так, брокеры и дилеры, работающие на финансовом рынке, также являются посредниками. Что же отличает банки от них? *Специфические черты банков* в том, что они:

- во-первых, имеют дело с такими формами финансовых контрактов (размещение кредитов и депозитов), которые менее ликвидны, нежели ценные бумаги, которые могут, как правило, более свободно обращаться на рынке;
- во-вторых, характеристики депозитных контрактов, заключаемых банками с заимодателями, качественно отличаются от характеристик кредитных контрактов, заключаемых ими с заемщиками.

Перечисленные особенности являются своего рода базой для фундаментальной гипотезы, объясняющей причины существования банков. Согласно ей банки рассматриваются как *экономические институты, осуществляющие трансформацию финансовых контрактов.* Такой подход получил развитие в работах таких известных экономистов, как Бенстон, Смит, Фама (*Benston, Smith, Fama).*

В «идеальной» экономике, предполагающей наличие совершенной конкуренции, возможность полной диверсификации и полную прозрачность рынка, для финансовых посредников места нет. Однако как только к описанию экономической системы добавляются предпосылки, учитывающие возможность качественных и концентрационных эффектов в процессах трансформации активов, одновременно возникает и объективная необходимость в тех, кто эти процессы будет осуществлять, то есть в финансовых посредниках.

В свете этого финансовые посредники могут рассматриваться как коалиции заемщиков и кредиторов, которые реализуют трансакционные технологии, используя эффект экономии на масштабах, так и эффект экономии за счет концентрации возможностей.

Другой, не менее важной, причиной существования института финансового посредничества является фактор информационной асимметрии, заключающейся в неравных возможностях по доступу к информационным ресурсам у различных субъектов экономических отношений, что является источником преимуществ для одних и потерь для других.

В рамках моделей, развивающих теорию банков как финансовых посредников, можно выделить три принципиальных направления.

К первому можно отнести модели, трактующие банки как пулы (емкости) ликвидности или коалиции депозиторов. Здесь упор делается на раскрытие роли банковских учреждений в качестве совокупных фондов, обеспечивающих защиту вкладов от случайных рыночных колебаний.

Второе направление базируется на концепции банков как коалиции владельцев информации. Действительно, если доступ к информации о характеристиках проекта, предполагающего инвестиционные вложения, имеют только отдельные заемщики (информационная асимметрия), то конкурентное равновесие оказывается неэффективным.

Третье направление связано с так называемой теорией делегированного мониторинга. В условиях, когда наблюдается эффект возрастания доходов от масштаба, индивидуальные заимодатели предпочитают делегировать функции контроля (мониторинга) за поведением предпринимателей, в проекты которых они сделали инвестиции, специальным посредническим фирмам, т.е. банкам.

Описание простейшей модели финансового посредничества

Простейшая модель, иллюстрирующая механизм работы пулов ликвидности, была предложена в работе Брайанта (*Bryant)*[1] [3].

Она рассматривает некоторую абстрактную трехпериодную экономику (t = 0, 1, 2) с одним обобщенным продуктом, в рамках которого функционирует конечное множество агентов (экономических субъектов). Предполагается, что в момент времени $t = 0$ каждый из агентов владеет одной единицей продукта. Он обладает возможностью использовать его либо в момент времени $t = 1$ (т.н. раннее потребление), либо в момент времени $t = 2$ (т.н. позднее потребление).

Будем считать, что эффект от потребления продукта агентом может быть измерен с помощью некоторой функции полезности *u(C)*. При этом полезность при «раннем» потреблении C_1 единиц продукта будет $u(C_1)$, а при позднем потреблении C_2 единиц - $\rho \cdot u(C_2)$, где $\rho < 1$ - коэффициент дисконтирования.

Если считать, что выбор агентом типа потребления происходит под влиянием причин, имеющих случайную природу, то его можно смоделировать с помощью случайной величины, характеризующейся распределением вероятностей $\pi_1,\ \pi_2$ (π_t - вероятность потребить продукт в момент времени *t*, где *t* = 1 или 2). Тогда математическое ожидание суммарной полезности потребления продукта агентом может быть выражено как

$$U = \pi_1 \cdot u(C_1) + \pi_2 \cdot u(C_2). \qquad (7.1)$$

Относительно свойств функции полезности *u(C)* вполне естественно предполагать, что она является вогнутой и возрастающей.

Наконец, предполагается, что в ситуации позднего потребления, соответсвующей случаю инвестирования средств в проект с длительной технологией, агент получает доход $R > 1$ в момент $t = 2$. В случае же раннего потребления (досрочной ликвидации проекта) он получает в момент $t = 1$ доход $L < 1$.

Ситуация оптимального распределения

С точки зрения максимизации агентом полезности оптимальное распределение продукта может быть получено как решение задачи

$$\pi_1 \cdot u(C_1) + \pi_2 \cdot u(C_2) \to \max \qquad (7.2)$$

при условии

$$\pi_1 C_1 + \pi_2 \frac{C_2}{R} = 1. \qquad (7.3)$$

Необходимое условие экстремума $(C_1^*,\ C_2^*)$ для задачи (7.2)-(7.3) может быть записано как

$$u^I(C_1^*) = \rho \cdot R \cdot u^I(C_2^*). \qquad (7.4)$$

Из (7.4) получаем, что за исключением достаточно редкого случая, когда

$$u^I(1) = \rho \cdot R \cdot u^I(R), \qquad (7.5)$$

рыночное распределение $(C_1^M = 1,\quad C_2^M = R)$ не будет оптимальным по Парето.

В частном случае, в предположении, что функция полезности такова, что $C \cdot u^I(C)$ возрастает по *C*, было сформулировано соотношение

$$\rho \cdot R \cdot u^I(R) < \rho \cdot u^I(1) < u^I(1). \qquad (7.6)$$

Из (7.6) вытекает, что рыночное распределение может быть «улучшено» за счет увеличения C_1^M и уменьшения C_2^M:

$$C_1^M = 1 < C_1^*,\ C_2^M = R > C_2^M, \qquad (7.7)$$

что, собственно, и означает его Парето-неэффективность.

Ситуация существования финансовых институтов. Решение сформулированной проблемы неэффективности рыночного распределения и достижение оптимального состояния могут быть получены за счет введения механизма финансового посредничества.

7.1.2. Финансовые посредники как информационные коалиции

В данном классе экономико-математических моделей деятельность банка рассматривается в контексте проблемы *информационной асимметрии.* Ее суть может быть сведена к тому, что в подавляющем большинстве случаев предприниматели, предлагающие проекты, требующие финансовых вложений, лучше осведомлены о качестве и перспективах этих проектов, чем потенциальные инвесторы. Это порождает для последних ситуацию неблагоприятного выбора, конкретные формы проявления которой на финансовых рынках будут рассмотрены ниже.

Базовая модель рынка с учетом «неблагоприятного выбора»

Пусть имеется некоторая экономическая система, характеризующаяся тем, что в ее рамках функционирует значительное количество предпринимателей, каждый из которых предлагает свой проект в качестве потенциального объекта для инвестиций. Предположим, что все выносимые на рынок проекты можно представить в нормализованном виде и, таким образом, полагать, что для финансирования каждого из них требуется единица инвестиционных вложений.

Значение чистого дохода от инвестиций в проект считается реализацией случайной величины $\tilde{R}(\theta)$, распределенной по нормальному закону со средним θ и дисперсией σ^2 ($\tilde{R}(\theta) \in N(\theta, \sigma^2)$). Предполагается, что различные проекты имеют разные значения θ, в то время как значение дисперсии σ^2 является одинаковым для всех проектов.

Относительно θ делается допущение, что его действительная величина известна только предпринимателю, предлагающему проект, а потенциальные инвесторы владеют только информацией о статистических характеристиках распределения значений θ по выборке предпринимателей.

Инвесторы считаются риск-нейтральными и могут хранить свои сбережения без дополнительных затрат. Предприниматели же рассматриваются как экономические субъекты, избегающие риска. Последнее выражается в том, что хотя они и обладают начальным капиталом $W_0 > 1$, достаточным для финансирования своего проекта, но предпочитают использовать для этого привлеченный капитал.

Если обозначить через w конечное благосостояние предпринимателя, то предполагается, что оно может быть оценено с помощью функции полезности типа функции Неймана-Моргенштерна:

$$u(w) = 1 - \exp(-\rho w), \tag{7.8}$$

где постоянная $\rho > 0$ может быть интерпретирована как абсолютный *индекс неприятия риска*.

Соответственно, если предприниматель продаст на рынке свой проект по цене

$$P(\theta) = E\{\tilde{R}(\theta)\} = \theta, \tag{7.9}$$

то это обеспечит ему полную защиту от риска, а его конечное благосостояние будет равно $W_0 + \theta$.

Заметим, что если случайная величина $\tilde{x}$ распределена по нормальному закону с параметрами (μ, σ^2), то математическое ожидание функции $-\exp(-\rho\tilde{x})$ примет вид:

$$E\{-\exp(-\rho\tilde{x})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\exp(-\rho x)) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx =$$

$$= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\rho x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx = -\exp[\rho\mu - \frac{1}{2}\rho^2\sigma^2)]$$

или

$$E\{-\exp(-\rho\tilde{x})\} = \exp[\rho(\mu - \frac{1}{2}\rho\sigma^2)]. \tag{7.10}$$

Используя (7.10), получим

$$E\{u[W_0 + \tilde{R}(\theta)]\} = 1 - E\{\exp[-\rho(W_0 + \tilde{R}(\theta)])\} =$$

$$= 1 - \exp[-\rho(\theta + W_0 - \frac{1}{2}\rho\sigma^2)],$$

или

$$E\{u[W_0 + \tilde{R}(\theta)]\} = u(W_0 + \theta - \frac{1}{2}\rho\sigma^2). \tag{7.11}$$

В то же время, в случае продажи проекта (выбора финансирования из внешних источников) предприниматель получит $u(W_0 + P)$. Таким образом, он будет выходить на рынок тогда и только тогда, когда ожидаемый доход будет удовлетворять условию:

$$\theta < P + \frac{1}{2}\rho\sigma^2. \qquad (7.12)$$

Непосредственым результатом такого положения вещей станет то, что на продажу будут выставляться исключительно низкодоходные проекты, в то время как в случае ожидаемого высокого дохода предприниматель будет предпочитать самофинансирование. Пороговое значение $\hat{\theta}$, делящее проекты на низко- и высокодоходные, задается выражением

$$\hat{\theta} = P + \frac{1}{2}\rho\sigma^2. \qquad (7.13)$$

Описанная ситуация является по существу классическим примером проблемы, известной в микроэкономической теории как проблема неблагоприятного выбора. На таком рынке капитала установится равновесие при цене

$$P = E\{\theta \big| \theta < \hat{\theta}\}. \qquad (7.14)$$

Очевидно, что такое равновесие с точки зрения потребителей является неэффективным.

Частичное самофинансирование проектов является одним из традиционных путей решения проблемы неблагоприятного выбора с применением так называемого *сигнализирования.* Под сигнализированием понимаются такие действия предпринимателя, которые позволяют донести до инвестора тот факт, что предлагаемый ему проект действительно является высокодоходным.

Финансовые посредники как коалиции заемщиков. Можно показать, что в условиях неблагоприятного выбора коалиции заемщиков функционируют лучше, чем отдельные заемщики.

Еще один фундаментальный вывод заключается в том, что в рамках предпосылок, определяющих условия функционирования рынка с асимметричной информацией[1], издержки на единицу капитала убывают с увеличением размера коалиции заемщиков.

Соответственно, если мы рассматриваем коалицию заемщиков как посреднический финансовый институт (в частном случае – банк), то полученный вывод обосновывает причины эффективности его деятельности.

Финансовые посредники как учреждения делегированного мониторинга. Деятельность по мониторингу заемщика может осуществляться как непосредственно инвестором, и специальными фирмами, например рейтинговыми агентствами, аналитическими и аудиторскими компаниями. В частности, в этой роли могут выступать и банки. Даймондом[1] были предложены интересные теоретические модели, описывающие работу банка как учреждения делегированного мониторинга.

Модели, предусматривающие выбор между прямым финансированием и посредническим кредитованием. Если в предыдущих случаях банковское кредитование и непосредственное финансирование рассматривалось как альтернативные варианты денежного обеспечения проектов, осуществляемых предпринимателями, то в этих моделях рассматривается более реальная ситуация. В ней допускается, что фирмы могут выбирать между способами организации финансового обеспечения своей деятельности, а именно, между прямыми займами и банковскими кредитами.

Мониторинг и репутация. Следующим этапом в развитии теории, трактующей поведение банковских институтов как учреждений делегированного мониторинга, являются динамические модели, предусматривающие возможности изменения форм финансирования проектов на различных периодах их существования.

В частности, известна двухэтапная модель кредитного рынка, сформулированная Даймондом[1]. Ключевым элементом такой является иллюстрация того факта, что в процессе своего функционирования успешная фирма может обеспечить себе «репутацию», позволяющую получать прямые кредиты.

Кратко сформулируем основные результаты, которые получены на основе моделей, посвященных банкам как институтам финансового посредничества:

С точки зрения теории финансового посредничества банки могут быть рассмотрены как экономические институты, осуществляющие трансформацию финансовых контрактов. К принципиальным экономическим факторам, объясняющим причины существования банков, могут быть отнесены трансакционные издержки, ситуации информационной асимметрии, эффект экономии за счет концентрации возможностей, эффект экономии на масштабах.

В рамках простейшей однопродуктовой модели формирования экономических субъектов пула ликвидности (модели Брайанта) может быть показано, что оптимальное рыночное распределение продукта достигается при наличии институтов, выполняющих функции финансового посредничества.

В рамках базовой модели рынка капитала, описывающей взаимоотношение предпринимателей и инвесторов в условиях асимметричной информации, возможно достижение равновесия при условии, что предприниматели использую частичное самофинансирование предлагаемых ими проектов.

В условиях неблагоприятного выбора и возможного морального ущерба возникает потребность в деятельности посредника, осуществляющего контроль (мониторинг) за деятельностью заемщиков (предпринимателей). В рамках модели Даймонда может быть показано, что экономическая система, в которой действуют финансовые посредники с функциями делегированного мониторинга, оказываются эффективней непосредственного контроля инвестора за заемщиком.

Эффективность условий реализации проектов, выносимых предпринимателями на рынок капитала, может быть повышена за счет обеспечения ими смешанного финансирования: как банковского, так и прямого (за счет выпуска непосредственных обязательств предпринимателей перед инвесторами). Могут быть предложены различные схемы, объясняющие возможности фирм по привлечению более дешевого для них прямого кредитованию. С одной стороны, это динамические модели, описывающие процесс построения успешными предпринимателями «репутации», способствующей доверию инвесторов. Другая категория моделей связывает доступ к непосредственному финансированию с объемом капитала, которым владеет фирма.

7.1.3. Одна из возможных модификаций оптимизационных моделей банка

Рассмотрим возможный тип оптимизационной модели банка на примере одной из ее модификаций. Основой любой оптимизационной модели банка является оптимизационная задача, которую в общем виде можно сформулировать следующим образом:

$$\max E[F(W_{t+\tau})] \tag{7.15}$$

при ограничениях

$$W_{t+\tau} = W_t \cdot \prod_{k=1}^{\tau}(1+\Pi_{t+k}); \tag{7.16}$$

$$\Pi_{t+k} = \frac{\pi_{t+k}}{W_{t+k}}; \tag{7.17}$$

$$\pi_{t+k} = \sum_{i=1}^{n} r_{i,t+k}^{A} \cdot A_{i,t+k} - \sum_{j=1}^{m} r_{j,t+k}^{D} \cdot D_{j,t+k} - C(A_{i,t+k}, D_{j,t+k}); \tag{7.18}$$

$$A_{i,t+k} = A_{i,t+k-1} + \Delta A_{i,t+k-1}; \tag{7.19}$$

$$D_{j,t+k} = D_{j,t+k-1} + \Delta D_{j,t+k-1}, \tag{7.20}$$

где $E[\cdot]$ - оператор математического ожидания;

$F[\cdot]$ - целевая функция (непрерывная, монотонно возрастающая выпуклая вверх);

$W_{t+\tau}$ - величина собственного капитала в момент окончания планового (анализируемого) периода (горизонта прогноза);

t - номер начального интервала времени (начало отсчета планового периода);
τ - количество интервалов в плановом периоде (горизонт прогноза);
k - номер интервала времени внутри планового периода $[t, t+\tau]$, $0 \le k \le \tau$;
π_{t+k} - чистая прибыль банка за период $[t+k-1,\ t+k]$;
Π_{t+k} - норма прибыли (прибыль на единицу капитала) за период $[t+k-1,\ t+k]$;
$A_{i,t+k}$ - средняя величина i-го вида активов банка за период $[t+k-1,\ t+k]$, $\mathrm{i}=1,...,\mathrm{n}$;

$r^A_{i,t+k}$- норма дохода (процентная ставка) по i-му виду активов банка за период $[t+k-1,\ t+k]$, $\mathrm{i}=1,...,\mathrm{n}$;

$D_{j,t+k}$ - средняя величина j-го вида обязательств банка за период $[t+k-1,\ t+k]$, $\mathrm{j}=1,...,\mathrm{m}$;

$r^D_{i,t+k}$- норма расходов (процентная ставка) по j-му виду обязательств банка за период $[t+k-1,\ t+k]$, $\mathrm{j}=1,...,\mathrm{m}$;

$\Delta A_{i,t+k-1}$ - изменение объема *i*-го вида актива за период $[t+k-2,\ t+k-1]$, $i=1,...,n$;

$\Delta D_{j,t+k-1}$- изменение объема *j*-го вида обязательств банка за период $[t+k-2,\ t+k-1]$, $i=1,...,n$;

$C(\cdot)$ - функция операционных расходов банка (помимо процентных расходов).

Математические модели банка можно классифицировать по следующим признакам:
1) состав управляемых переменных модели;
2) размерность целевой функции;
3) наличие фактора риска;
4) вид целевой функции;
5) количество интервалов времени в рамках планового периода;
6) степень общности модели.

Управляемыми переменными модели банка считают обычно величины объемов его активов и пассивов. Иногда из числа управляемых переменных исключается величина вкладов до востребования (она считается экзогенной). Если к управляемым переменным относятся указанные объемные показатели, то банк рассматривается как “price taker” (“берущий цену”), т.е. он использует те же уровни процентных ставок по активам и пассивам, которые складываются на финансовом рынке и являются для него экзогенными переменными). Эта ситуация соответствует условиям совершенной конкуренции на рынке банковских услуг.

В ряде моделей управляемыми переменными считаются уровни процентных ставок по активным и пассивным операциям банка, т.е. банк рассматривается как “price setter” (“устанавливающий цену”). Такая ситуация возможна в условиях несовершенной конкуренции, например, когда данный коммерческий банк обладает некоторой степенью монопольного контроля над рынком банковских услуг или его отдельными сегментами.

Управление уровнями процентных ставок r^A_i, r^D_j по активам и пассивам позволяет банку осуществлять косвенное воздействие на величины объемов своих активов и пассивов A_i, D_j, если известны или могут быть определены соответствующие кривые спроса и предложения финансовых ресурсов на рынке, т.е. функции $A_i(r^A_j)$ и $D_j(r^D_j)$.

Почти все модели банка используют скалярные целевые функции. Вместе с тем, применяются и два критерия (суммарная чистая прибыль за весь период и величина акционерного капитала банка в конце планового периода), на основании которых формируется один общий критерий как взвешенная сумма указанных частных критериев.

Важным классифицирующим признаком оптимизационных моделей банка является наличие или отсутствие в них фактора риска. Говоря о риске, следует различать:

- ситуацию (условия) риска, т.е. в “рисковой” постановке оптимизационная задача будет стохастической, причем соответствующие вероятностные характеристики известны, заданы или могут быть определены (т.н. объективный или субъективный риск). Для банка наличие ситуации риска означает, что будущие фактические результаты деятельности банка могут отличаться от ожидаемых;
- количественную меру риска, в качестве которой обычно используется дисперсия или стандартное отклонение какого либо абсолютного или относительного показателя, характеризующего финансовые результаты деятельности банка (дохода, прибыли и т.п.);
- отношение к риску, т.е. субъективное восприятие банком наличия ситуации риска (отсутствие определенности). При этом банк рассматривается как инвестор, отклоняющийся от риска (*risk aversive*), т.е. считающий для себя нежелательным наличие риска, либо как инвестор безразличный к риску (*risk neutral*).

Принятие постулата о безразличии банка к риску позволяет упростить оптимизационную задачу и ограничиться рассмотрением только математических ожиданий соответствующих показателей, т.е. фактически свести ее от стохастической к детерминированной постановке.

При рассмотрении банка как инвестора, уклоняющегося от риска, поведение банка описывается с помощью методов теории выбора инвестиционного портфеля (**портфеля ценных бумаг)** в условиях риска, основы которой были заложены в 50-х гг. в трудах Г. Марковица Дж. Тобина.

Все многообразие конкретных целевых функций моделей банка можно свести к трем основным группам, соответствующих наиболее важным целям банка, - **увеличение прибыли, росту собственного капитала банка и уменьшению риска.**

Практически в любой модели присутствует целевая функция, характеризующая величину прибыли (абсолютной, относительной, детерминированной, ожидаемой, за один интервал или за весь плановый период, дисконтированный или недисконтированной и т.д.) или величины дохода.

Целевая функция, характеризующая величину собственного или акционерного капитала банка в конце планового периода, в явном виде используется значительно реже. Возможно в этом и нет особой необходимости, так как, задав величину собственного капитала W_t в начале планового периода и абсолютные или относительные величины прибыли π_{t+k}, Π_{t+k} для всех интервалов времени, $k = 0,...,\tau$, в рамках планового периода, из ограничений-равенств (7.12) – (7.16) однозначно определяется искомая величина капитала $W_{t+\tau}$.

Что касается ситуации риска, то для количественного описания риска специальная целевая функция, как правило, не формируется. Если банк считается уклоняющимся от риска инвестором, то для него задача минимизации риска (дисперсии прибыли и т.п.) решается путем максимизации целевой функции U от двух детерминированных аргументов, например математического ожидания прибыли $\mu_\pi = E[\pi]$ и дисперсии прибыли σ_π^2, вида

$$\max U(\mu_\pi, \sigma_\pi^2) = \max(\mu_\pi - \frac{b}{2}\sigma_\pi^2), \tag{7.21}$$

где b – некоторая константа, $b \geq 0$.

Варьируя величину параметра b, можно получить множество оптимальных по Парето решений $(\mu_\pi^*, \sigma_\pi^{2*})$, которые определяют т.н. «эффективные портфели» (*efficient portfolios*) для соответствующих значений этого параметра.

Другой способ учета риска в целевой функции оптимизационной задачи банка состоит в подборе подходящей монотонно возрастающей вогнутой функции полезности $F(W_{t+\tau})$, для которой $\dfrac{\partial^2 F}{\partial W_{t+\tau}^2} < 0$. Обычно для этого используются экспоненциальные, квадратичные, логарифмические или степенные функции, определенные на соответствующих множествах.

Можно показать, что для вогнутой целевой функции (функция полезности) задача максимизации функции $E[F(W)]$ эквивалентна задаче максимизации целевой функции $U(\mu_\pi, \sigma_\pi^2)$:

$$\max E[a - c \cdot e^{-b\pi}] \approx \max(E[\pi] - \frac{b}{2}\sigma_\pi^2), \tag{7.22}$$

где *a, b, c* – задаваемые банком параметры, $b > 0,\ c > 0$.

По форме целевая функция оптимизационной задачи (7.15) – (7.20) может быть линейной, нелинейной, а также представлять собой функционал.

По факту учета временных интервалов все рассматриваемые модели можно разделить на статические и динамические.

По степени общности анализируемые модели делятся на общие (полные) или частичные (частные). В первых учитываются все основные аспекты деятельности банка, моделируется поведение обеих частей банковского баланса, во вторых – исследуются отдельные аспекты банковской деятельности.

Среди частных моделей можно выделить следующие модели:

- модели управления запасами (резервами) денежной наличности банка;
- модели распределения активов (формирования оптимального портфеля активов) банка;
- модель управления банковским портфелем ценных бумаг (инвестиционным портфелем);
- модель определения оптимальной величины собственного капитала (через показатель «финансового рычага» (*leverage*), т.е. отношения суммы активов к капиталу);
- модель управления пассивами банка.

При всем многообразии типов и видов оптимизационных моделей деятельности коммерческого банка, предлагаемые их авторами подходы к решению соответствующих оптимизационных задач можно свести к двум группам методов – методам линейного и нелинейного программирования.

Наряду с отмеченным классом моделей, заслуживает внимание и динамические модели банка с непрерывным временем. Эти модели основываются на использовании теории оптимального управления. При этом, максимизируемый функционал может представляет собой суммарную полезность распределяемой прибыли (дивидендных выплат) за анализируемый период или сочетать в себе как интегральный так и терминальный показатели. Решение задачи оптимального управления применительно к банковской сфере может использоваться при разработке планов оптимальной системы портфелей банка, а также при стратегическом планировании.

7.2. Модели и задачи стохастического программирования в банковской деятельности

Разработать планы оптимальной системы финансовых портфелей банка не просто. Необходима слаженная работа целой группы квалифицированных специалистов: топ-менеджера, отвечающего за стратегию и управления финансовыми ресурсами банка, плановика или портфельного менеджера, задающего и корректирующего варианты планов портфелей, аналитика инструментов фондового рынка, аналитика – математика, обеспечивающего алгоритмическое обеспечение решаемой оптимизационной задачи и программиста, реализующего финансовые и математические идеи в виде программного обеспечения. Но даже при выполнении этих условий, т.е. наличия квалифицированных специалистов, при внедрении задач в банковскую деятельность встает вопрос: а будет ли вообще план полезен, если все время случайным образом меняются большинство параметров модели? Ответом на этот вопрос является постановка и решение задачи стохастического программирования, к рассмотрению которой мы переходим.

Варианты постановки задач стохастического программирования

Рассмотрим, как следует составлять математическую модель задачи оптимизации для стохастической задачи. За основу возьмем модель линейного программирования:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min) \tag{7.23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$
$$d_j \le x_j \le D_j\ ; \quad i = \overline{1,m}\ ; \quad j = \overline{1,n} \tag{7.24}$$

Если коэффициенты c_j в целевой функции – случайные величины, то возможны две постановки задачи оптимизации:

- Максимизация (минимизация) среднего значения целевой функции, которая называется М-постановкой;
- Максимизация вероятности получения максимального (минимального) значения, которая называется Р-постановкой:

Если случайными являются величины a_{ij} и b_i, входящие в ограничения, то i-ое ограничение записывается так:

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge \alpha_i \tag{7.25}$$

где α_i - заданная вероятность, с которой должно быть выполнено ограничение.

Задача стохастического программирования в М-постановке:

$$M[F] \to \max \tag{7.26}$$

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge \alpha_i \qquad .27)$$

$$d_j \le x_j \le D_j \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}$$

Для решения задачи следует перейти к ее детерминированному эквиваленту. В этом случае целевая функция записывается так:

$$M[F] = \sum_{j=1}^{n} M[c_j] \cdot x_j \tag{7.28}$$

Детерминированный эквивалент ограничений имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} M[a_{ij}] \cdot x_j + t(\alpha_i)\sqrt{\sum_{o=1}^{m} \sigma^2[a_{ij}] \cdot x_j^2 + \sigma^2[b_i]} \le M[b_i] \tag{7.29}$$

где α_i - задаваемый уровень вероятности, с которой должно выполнятся ограничение.

$t(\alpha_i)$ - вычисляется с помощью функции НОРМСТОБР(a_i).

Введем обозначение

$$W_i = \sqrt{\sum_{o=1}^{m} \sigma^2[a_{ij}] \cdot x_j^2 + \sigma^2[b_i]}\,. \tag{7.30}$$

Тогда, детерминированный эквивалент задачи выглядит следующим образом:

$$F = \sum_{j=1}^{n} M[c_j] \cdot x_j \to \max(\min) \tag{7.31}$$

$$\sum_{j=1}^{n} M[a_{ij}] \cdot x_j + t(\alpha_i) W_i \le M[b_i] \tag{7.32}$$

$$W_i = \sqrt{\sum_{o=1}^{m} \sigma^2[a_{ij}] \cdot x_j^2 + \sigma^2[b_i]} \tag{7.33}$$

$$d_i \le x_j \le D_j \qquad (7.34)$$
$$i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}$$

Будем рассматривать ставшую уже классической стохастическую задачу оптимизации портфеля банка следующего вида:

$$Пр = П_{ЦБ}\,ЦБ + П_{КР}\,КР – И_{ДВ}\,ДВ – И_{СД}\,СД \to \max\ ; \qquad (7.35)$$
$$ЦБ + КР = ДВ + СД + К\ ; \qquad (7.36)$$
$$ЦБ + КР < 100\ ; \qquad (7.37)$$
$$-0{,}7\ ЦБ + 0{,}3\ КР < 0\ ; \qquad (7.38)$$
$$КР > 35\ , \qquad (7.39)$$

где Пр – прибыль; ЦБ – ценные бумаги; КР – кредиты; ДВ – депозиты до востребования; СД – срочные депозиты; К – собственный капитал; $П_{ЦБ}$ и $П_{КР}$ – прибыль на ценные бумаги и кредиты, соответственно; $И_{ДВ}$ и $И_{СД}$ – издержки по привлечению депозитов.

Алгоритм решения задачи стохастического программирования легко получить, используя приведенные выше соотношения, а также символику и методику решения задачи линейного программирования (6.2) – (6.6). При вводе исходных данных достаточно часто значения $\sigma[a_{ij}]$, $\sigma[b_i]$ бывают неизвестны. В этом случае можно задать коэффициент вариабельности $\nu = \sigma[x]/M[x]$ и, зная который, определить

$$\sigma[x] = \nu[x]\cdot M[x]. \qquad (7.40)$$

Подготовка исходных данных и решение задачи производится по алгоритмам, аналогичным алгоритмам, которые изложены в теме 6.

7.3. Модели и задачи нелинейного программирования в банковской деятельности.

При моделировании банковской деятельности часто приходится сталкиваться с задачей математического программирования, которая может быть сформулирована следующим образом: найти значения переменных $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, которые удовлетворяют неравенствам

$$g_j(x_1,x_2,\dots,x_n) \le b_j, \qquad j = 1,2,\dots,m \qquad (7.41)$$

и обращает в минимум (максимум) функцию $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) \to \min. \qquad (7.42)$$

Вид функций $f(x)$ и $g_j(x)$ определяет класс задач математического программирования. Если все функции $f(x)$, $g_j(x)$, $j = 1,2,\dots,n$, линейны, получаем задачу *линейного программирования*, которую мы подробно разобрали в предыдущей теме. Если хотя бы одна из функций нелинейна, имеем задачу *нелинейного программирования.*

Большой интерес для моделирования банковской деятельности представляют также задачи математического программирования, в которых некоторые параметры или переменные являются случайными величинами. Это задачи *стохастического программирования* подобные тем, которые рассмотрены в предыдущем пункте.

Классические методы поиска экстремума в задачах нелинейного программирования тесно связаны с понятием выпуклой функции, седловой точки, необходимыми и достаточными условиями экстремума (теорема Куна-Таккера), функцией и множителями Лагранжа.

Контрольные вопросы

(выберите правильный ответ)

1. Классификация и классифицирующие признаки оптимизационных моделей банка?
   а) 1) выполнение функций финансового посредничества; 2) производственно-оптимизационные модели; 3) банк как совокупность стохастических финансовых потоков.
   б) модели финансового посредничества;
   в) производственно-оптимизационные модели;
   г) банк как совокупность стохастических финансовых потоков;
   д) статические и динамические модели.
2. Специфические черты банков?

а) имеют дело с менее ликвидными формами финансовых контрактов, чем ценные бумаги;
б) банки рассматриваются как экономические институты, осуществляеющие трансформацию финансовых контрактов;
в) банки осуществляют функцию делегированного мониторинга;
г) 1) имеют дело с менее ликвидными формами финансовых контрактов, чем ценные бумаги; 2) характеристики депозитных и кредитных контрактов качественно отличаются от характеристик кредитных контрактов, заключаемых ими с заемщиками;
д) характеристики депозитных и кредитных контрактов качественно отличаются от характеристик кредитных контрактов, заключаемых ими с заемщиками;

3. Суть простейшей модели финансового посредничества (модель Брайанта)?
а) рассматривает некоторую абстрактную трехпериодную экономику (t = 0,1,2) с одним конечным продуктом, в рамках которого функционирует конечное множество агентов (экономических субъектов).
б) рассматривает банк как пул ликвидности и коалицию депозиторов.
в) рассматривает функции делегированного мониторинга.
д) учитывает факторы экономии за счет концентрации возможностей и экономии на масштабах.
4. К каким основным группам, соответствующим наиболее важным целям банка, можно свести многообразие конкретных целевых функций моделей банка?
а) увеличение прибыли;
б) увеличение прибыли; рост собственного капитала; уменьшение риска;
в) рост собственного капитала;
г) уменьшение риска;
д) увеличение прибыли и рост собственного капитала.
5. Функция полезности Неймана-Моргенштерна?
а) $u(w) = 1 + \exp(-\rho w)$;
б) $u(w) = \exp(-\rho w)$;
в) $u(w) = 1 - \exp(\rho w)$;
г) $u(w) = 1 - \exp(-\rho w)$;
д) $u(w) = \exp(\rho w)$.
6. Какие принципиальные экономические факторы объясняют причины существования банков?
а) эффект экономии на масштабах.
б) трансакционные издержки;
в) ситуации информационной симметрии;
г) эффект экономии за счет концентрации возможностей;
д) трансакционные издержки; ситуации информационной симметрии; эффект экономии за счет концентрации возможностей; эффект экономии на масштабах.
7. В рамках какой модели может быть показано, что оптимальное рыночное распределение продукта достигается при наличии институтов, выполняющих функции финансового посредничества?
а) в рамках однопродуктовой модели формирования группой экономических субъектов пула ликвидности (модель Брайанта);
б) в рамках многопродуктовой модели формирования группой экономических субъектов пула ликвидности;
в) в рамках модели рыночной экономики с учетом оптимального по Парето распределения продукта;
г) в рамках модели равновесия по Нэшу;
д) в рамках модели рынка капитала с учетом «неблогоприятного выбора».

8. В рамках какой модели может быть показана роль и значение банка как учреждения делегированного мониторинга?
   а) в рамках модели Даймонда может быть показано, что экономическая система, в которой действуют финансовые посредники, оказывается эффективней непосредственного контроля инвестора за заемщиком.
   б) в рамках модели Брайанта;
   в) в рамках модели Лиланда-Пайла;
   г) в рамках модели финансового посредничества в условиях информационной асимметрии.
   д) в рамках модели по трансформации активов.
9. При каком условии в рамках базовой модели рынка капитала возможно достижение равновесия?
   а) при условии финансового посредничества;
   б) при условии смешанного финансирования;
   в) при условии выпуска непосредственных обязательств предпринимателей перед инвесторами;
   г) при условии трансформации активов;
   д) при условии что предприниматели используют частичное самофинансирование.
10. За счет чего может быть повышена эффективность условий реализации инвестиционных проектов?
   а) за счет того что предприниматели используют частичное самофинансирование;
   б) за счет смешанного финансирования: как банковского так и прямого (за счет выпуска непосредственных обязательств предпринимателей перед инвесторами);
   в) за счет выпуска непосредственных обязательств предпринимателей перед инвесторами;
   г) за счет трансформации активов;
   д) за счет финансового посредничества.

ТЕМА 8. ПРОИЗВОДСТВЕННО-ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ БАНКОВСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

8.1. Основы производственно-организационного моделирования банковской деятельности

Система моделей и методов, которые будут рассмотрены в настоящей теме, базируются на представлении банка как некоторого абстрактного объекта, характеризующегося входными и выходными параметрами, а также функцией, которая их связывает. Такой подход в определенном смысле приближает математические модели банков к традиционным моделям производственных предприятий и организаций. Поэтому он получил название ***производственно-организационного.***

При данном подходе банк фактически рассматривается как *фирма финансовых услуг* или *финансовая фирма.* В рамках концепции финансовой фирмы, также как и в моделях, изученных в предыдущей теме, деятельность банка трактуется как посредничество, в рамках которого покупаются одни финансовые ресурсы (займы, кредиты и т.п.) и продаются другие (депозиты). Однако в данном случае делается упор на изучение технологии, определяющей возможности банка по проведению посреднических операций с финансовыми ресурсами. Классическим способом описания технологии является задание *производственной функции банка*, т.е. такой функции, которая связывает его входные параметры с выходными. Таким образом, финансово-банковские институты в моделях данного класса выступают в качестве самостоятельных экономических субъектов, которые, исходя из имеющихся у них целевых установок, стараются оптимальным образом воздействовать на внешнюю среду.

Производственно-организационный подход представляет собой мощный инструмент по изучению многих принципиальных проблем, возникающих в банковской сфере. Это, прежде всего, условия существования равновесия на рынке кредитов и депозитов, проблемы управления рисками в банковской деятельности, разработка денежной политики и банковского регулирования, влияние институциональной организации субъектов финансового рынка на формы и условия конкуренции.

Среди подобных моделей и методов можно выделить:

- Производственные модели банка в условиях совершенной конкуренции, изучающие общие подходы к изучению деятельности банка, вытекающие из макроэкономической теории, а также собственно производственно-организационную модель банка.
- Модели поведения монополистического банка (модель Монти-Кляйна).
- Модели банковской конкуренции.

8.1.1. Производственные модели банка в условиях совершенной конкуренции

В качестве простейшей иллюстрации применения производственно-организационного подхода может быть рассмотрена следующая модель. Представим банк как фирму, оказывающую финансовые услуги, сводящиеся к привлечению депозитов со стороны заимодателей и предоставлению кредитов заемщикам. Допустим также, что ее состояние может быть охарактеризовано всего лишь двумя параметрами, а именно:

- объемом депозитов *D;*
- объемом кредитов *L*.

Предположим, что технология работы такой фирмы может быть описана с помощью функции издержек *C(D,L),* возникающих при управлении депозитами *D* и кредитами *L*. Чтобы излишне не усложнять модель будем считать, что у всех банков технологические возможности одинаковы и могут быть описаны с помощью единственной производственной функции:

$$C_j(D,L) = C(D,L) \text{ для } \forall j = \overline{1,n}.$$

Агрегированное (и предельно прощенное) представление банковского баланса ($L_J + R_j = D_j$), безусловно, весьма дкоека от реальных банковских документов и нужна нам исключительно для того, чтобы представить соотношение параметров, используемых в рассматриваемых в простейшей модели финансовой фирмы.

Резервы R_j , в свою очередь, распадаются на две принципиальные части:

$$R_j = W_j + M_j , \tag{8.1}$$

где W_j – обязательные страховые резервы, перечисляемые каждым банком на специальные счета в ЦБ России;

M_j – свободные денежные суммы, представляющие чистую позицию банка на межбанковском рынке.

Принципиальное различие между этими двумя составляющими состоит в том, что суммы, резервируемые в центральном банке (W_j), не приносят процентного дохода, и, следовательно, банк объективно стремится из минимизировать. Как правило, регулирующий орган определяет минимальную долю обязательных резервов пропорционально объему депозитов, привлеченных банком:

$$W_j = \alpha D_j , \tag{8.2}$$

где α - норма обязательного резервирования. Она представляет собой один из важнейших инструментов денежно-кредитной политики, проводимой центральным банком. В частности, посредством изменения значения α может регулироваться количество денег в экономике. Если игнорировать валютное обращение, мы получим простое соотношение, связывающее в условиях равновесия денежную базу и депозиты, привлеченные банком:

$$W = \sum_{J=1}^{n} W_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha D_j = \alpha D . \tag{8.3}$$

8.1.2. Общие подходы к изучению деятельности банка, вытекающие из макроэкономической теории

Одной из ключевых проблем, решаемых в рамках микроэкономических моделей банковской деятельности, является выяснение тех закономерностей, в соответствии с которыми устанавливаются значения процентных ставок как по кредитам, выдаваемых банками фирмами, так и по депозитам, привлекаемым ими со стороны потенциальных заемщиков (r_L, r_D). Данные вопросы перекликаются с вопросами ценообразования в классической теории фирмы.

Для начала остановимся на самых общих подходах к решению указанных задач, базирующихся на фундаментальных макроэкономических положениях.

В агрегированном виде связь между денежной массой, циркулирующей в экономике, и общим количеством депозитов и кредитов может быть описана следующими формулами:

$$D = \frac{W}{\alpha} = \frac{G - B}{\alpha}, \tag{8.4}$$

$$L = D - W = \frac{W}{\alpha} - W = (\frac{1}{\alpha} - 1)W = (G - B)(\frac{1}{\alpha} - 1). \tag{8.5}$$

где G – государственный дефицит; B – государственные ценные бумаги (обязательства); W – денежная база; D - депозиты.

Из (8.4) можно получить выражение для предельного изменения депозитов в зависимости от денежной базы

$$\frac{\partial D}{\partial W} = -\frac{\partial D}{\partial B} = \frac{1}{\alpha} > 0. \tag{8.6}$$

Данный показатель получил название *денежного мультипликатора*. С макроэкономической точки зрения он может служить оценкой для значения нормы процентных выплат по депозитам (r_D).

Аналогично может быть определен *кредитный мультипликатор*:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = -\frac{\partial L}{\partial B} = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0, \tag{8.7}$$

представляющий собой предельный прирост общей суммы кредитов на единичное изменение денежной базы. Кредитный мультипликатор, соответственно, может играть роль оценки значения для процентной ставки, выплачиваемой по кредитам (r_L).

8.1.3. Производственно-организационная модель поведения банка в условиях совершенной конкуренции

Напомним, что ситуация совершенной конкуренции предполагает, что банки пассивно принимают значения ставок r_L и r_D , не имея возможности повлиять на них. Также внешним параметром для них является ставка доходов на капитал, присутствующий на межбанковском рынке r.

С учетом ранее введенных обозначений прибыль банка описывается следующим образом:

$$\pi = r_L L + rM - r_D D - C(D,L), \tag{8.8}$$

где $r_L L$ – прибыль, приносимая кредитами объемом L;

rM - доходы (расходы), которые банк имеет по своей чистой позиции на межбанковском рынке;

$r_D D$ - выплаты, которые банк производит по депозитам;

$C(D,L)$ – издержки банка на управление депозитами D и кредитами L;

Поскольку чистая позиция банка задается выражением

$$M = (1-\alpha)D - L, \tag{8.9}$$

то функцию прибыли банка можно представить как

$$\pi(D,L) = (r_L - r)L + (r(1-\alpha) - r_D)D - C(D,L). \tag{8.10}$$

Таким образом, в построенной модели прибыль банка представляет собой функцию от его депозитов и кредитов. Если поставить задачу максимизации функции π по аргументам D и L, то необходимое условие оптимальности примет вид:

$$\frac{\partial\pi}{\partial D} = (r(1-\alpha) - r_D) - \frac{\partial C(D,L)}{\partial D} = 0,$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial L} = (r_L - r) \qquad - \frac{\partial C(D,L)}{\partial L} = 0. \tag{8.11}$$

Из (8.11) следует ряд фундаментальных свойств, характеризующих оптимальное поведение банка в конкурентной экономике:

- Максимизируя свою прибыль в условиях свободной конкуренции, банк будет привлекать депозиты в таком объеме, чтобы предельные издержки на управление ими равнялись $r(1\text{-}\alpha) - r_D$.
- По аналогии, кредиты будут выдаваться в таком объеме, чтобы предельные издержки на управление равнялись r_L- r.

Заметим, что в рамках подхода к банку как к фирме финансового посредничества величину $r(1\text{-}\alpha) - r_D$ можно трактовать как норму расходов на оказываемые услуги, а r_L- r – как норму дохода, приносимого данным видом деятельности.

8.2. Модели поведения монополистического банка

Как известно, ситуация совершенной конкуренции является нехарактерной для банковской отрасли, которой свойственны высокие входные барьеры. В связи с этим более адекватными экономическими реалиями представляются модели, рассматривающие поведение банка в условиях монополии и олигополии. На некоторых (наиболее известных) мы остановимся в настоящем параграфе.

8.2.1. Описание модели Монти – Кляйна

Для начала рассмотрим достаточно простую модель поведения банка-монополиста, получившую в литературе название *модели Монти – Кляйна (Monti – Klein)*[1] ([9,11]).

В ее рамках действует банк, который в соответствии с классической микроэкономической теорией монополии обладает возможностями по изменению величин процентных ставок на кредиты и депозиты (r_L и r_D). Формально данную предпосылку можно выразить через задание функций:

- $L(r_L)$, ставящей в соответствие значению процентной ставки за кредиты r_L объем кредитов L, которые потенциальные заемщики возьмут у банка по такой ставке;
- $D(r_D)$, ставящей в соответствие значению процентной ставки за депозиты r_D объем средств D, которые сможет занять у депозиторов банк, обещая им выплаты по данной ставке.

---

[1] *Klein M.* Theory of banking firm // *The Journalof Money, Credit and Banking,* vol. 3, pp. 423-445, 1987.

Monti M. Deposit, credit, and interest rate determination under alternative bank objectives // *Mathematical methods of finance.* Amsterdam: North-Holland, 1972.

Представляется естественным считать, что функция $L(r_L)$ является убывающей, а $D(r_D)$ – возрастающей.

При дальнейшем изложении модели нам также понадобятся и обратные функции $r_L(L)$ и $r_D(D)$. Дополнительно будем полагать, что процентная ставка по межбанковским кредитам является параметром, задаваемым извне (допустим назначается центральным банком). Тогда прибыль, получаемая некоторым банком-монополистом, будет равна

$$\pi(D,L) = (r_L(L) - r)L + (r(1 - \alpha) - r_D(D))D - C(D,L). \tag{8.12}$$

Необходимое условие максимума функции прибыли $\pi(D,L)$ примет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \pi}{\partial D} = -r_D^I(D)D + r(1-\alpha) - r_D) - r_D - \frac{\partial C(D,L)}{\partial D} = 0, \\ &\frac{\partial \pi}{\partial L} = r_L^I(L)L + r_L - r - \frac{\partial C(D,L)}{\partial L} = 0. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Заметим, что в случае, если выполняется предположение о вогнутости $\pi(D,L)$, то условие (8.13) будет также и достаточным.

Эластичность спроса на кредиты по процентной ставке выражается формулой

$$\varepsilon_L = -\frac{r_L L^I(r_L)}{L(r_L)}. \tag{8.14}$$

Знак «минус» в формуле (8.14) нужен для обеспечения для обеспечения неотрицательности значения эластичности ($\varepsilon_L > 0$).

В свою очередь, *эластичность предложения депозитов* (по процентной ставке) примет вид

$$\varepsilon_D = \frac{r_D D^I(r_D)}{D(r_D)} > 0. \tag{8.15}$$

С учетом (8.14) и (8.15) решение системы (8.13) (r_L^*, r_D^*) определяется равенствами

$$\frac{r_L^* - (r - C_L^I)}{r_L^*} = \frac{1}{\varepsilon_L(r_L^*)} \tag{8.16}$$

$$\frac{r(1-\alpha) - C_D^I - r_D^*}{r_D^*} = \frac{1}{\varepsilon_D(r_D^*)}. \tag{8.17}$$

Нетрудно заметить, что левые части уравнений (8.16)-(8.17) представляют собой традиционные показатели степени монопольной власти над ценой – *индексы Лернера* (разность цены и предельных издержек, деленная на цену).

В результате условие равновесия в монопольной банковской системе можетбыть сформулировано следующим образом:

- банк-монополист будет устанавливать количество кредитов *(L)* и депозитов (*D)* таким образом, чтобы выполнялось условие равенства индексов Лернера обратным эластичностям.

Из (8.16)-(8.17) следует, что чем больше влияние банков на величины ставок по депозитам или кредитам, тем больший индекс Лернера и меньшая эластичность соответствует им. Также можно прийти к интуитивному заключению о том, что предельные издержки будут больше тогда, когда сильнее монопольная власть власть банка.

Дополнительно следует обратить внимание и на то, что модель поведения банка в конкурентной среде может рассматриваться как частный случай модели Монти-Кляйна, который получается при стремлении значений эластичностей к бесконечности, т.е. получаются условия конкурентного равновесия (8.11).

Из условия равновесия в монопольной банковской системе вытекает вывод о том, что *появление на финансовом рынке заменителей (субститутов) банковских услуг может* *оказать неблагоприятное влияние на предельные издержки банка по урправлению кредитами и депозитами.* Например, это может произойти при получении домохозяйствами доступа к разного рода взаимным денежным фондам, что явится субститутами для банковских депозитов, или же при выпуске фирмами прямых долговых обязательств, которые замещают банковское кредитование.

Непосредственно из (8.16)-(8.17) вытекает принципиально важное заключение о том, что если в рамках модели Монти-Кляйна функция издержек управления банком C является аддитивной относительно своих параметров D и L, то значения оптимальных ставок по депозитам и кредитам (r_L и r_D) являются независимыми друг от друга; другими словами, кредитный и депозитный рынки обладают независимыми характеристиками для состояния равновесия.

Наконец, приведем еще одно важное свойство состояния равновесия для случая банка-монополиста:

Если в модели Монти-Кляйна функция издержек является аддитивной, то при возрастании ставки межбанковского рынка r ставки по кредитам (r_L) и депозитам (r_D) также возрастают.

8.2.2. Модели олигополии

Ситуация, при которой в условиях рыночной экономики банковский сектор может контролирваться только одним банком-монополистом, представляется малореалистичной. В то же время более правдоподобным выглядит предположение, когда в банковском секторе существует конкуренция ограниченного число банков, что соответствует модели олигополии. На соответствующей модификации модели Монти-Кляйна мы и остановимся.

Пусть на рынке присутствует n банков, пронумерованных индексом $j \in \overline{1,n}$. Допустим также, что все они характеризуются одинаковой линейной функцией издержек управления:

$$C_j(D,L) = C(D,L) = \gamma_D D + \gamma_L L\,. \tag{8.18}$$

Изучение свойств модели начнем с выяснения условий существования в ней равновесия по Курно.

В контексте рассматриваемой ситуации под *равновесием по Курно* будем понимать такой вектор $\{(D_j^*, L_j^*)\}_{j=\overline{1,n}}$ размерности $2 \times n$, где (D_j^*, L_j^*) – количество депозитов и кредитов, принадлежащих j – му банку, что для всех j пара значений (D_j^*, L_j^*) такова, что она максимизирует прибыль j – го банка при условии, что остальные банки $(i \neq j)$ владеют кредитами и депозитами в объемах $\{(D_j^*, L_j^*)\}_{i \neq j}$.

Другими словами, вектор $\{(D_j^*, L_j^*)\}_{j=\overline{1,n}}$ задает такое устойчивое состояние банковской системы, от которого каждому банку в отдельности не выгодно отклоняться при условии, что остальные банки также будут придерживаться своих «равновесных» стратегий). Напомним, что основной специфической особенностью понятия равновесия по Курно является то, что в тех моделях, где оно рассматривается, стратегии участников (фирм, банков и т.п.) задаются в форме принятия решений по объему продукции, выставляемой на рынок (для банков, соответственно, по объемам кредитов и депозитов).

С математической точки зрения для каждого j пара (D_j^*, L_j^*) определяется как решение задачи

$$\max_{(D_j, L_j)} \{(r_l(L_j + \sum_{i:i \neq j} L_j^*) - r)L_j + (r(1-\alpha) - r_D(D_j + \sum_{i:i \neq j} D_j^*))D_j - C(D_j, L_j)\}.$$

Если обозначить через

$$D^* = \sum_{j=1}^{n} D_j^* \quad \text{и} \quad L^* = \sum_{j=1}^{n} L_j^*\,, \tag{8.19}$$

то нетрудно заметить, что для функции издержек типа (3.2.13) единственное равновесное состояние определяется условиями:

$$D_j^* = \frac{D^*}{n} \quad \text{и} \quad L_j^* = \frac{L^*}{n}. \tag{8.20}$$

В этом случае функция прибыли отдельного банка примет вид:

$$\begin{aligned} \pi_j(D_j, L_j) &= (r_L(nL_j) - r)L_j + (r(1-\alpha) - r_D(nD_j))D_j - C(D_j, L_j) = \\ &= (r_l(L^*) - r)L_j + (r(1-\alpha) - r_D(D^*))D_j - C(D_j, L_j). \end{aligned} \tag{8.21}$$

Необходимое условие максимума $\pi_j(D_j, L_j)$ определяется уравнениями:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial D_j} = -r_D^I(D^*)\frac{D^*}{n} + r(1-\alpha) - r_D(D^*) - \gamma_D = 0,$$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial L_j} = r_L^I(L^*)\frac{L^*}{n} + r_L(L^*) - r - \gamma_L = 0.$$

Полученные условия можно переписать в следующем виде:

$$\frac{r_L^* - (r + \gamma_L)}{r_L^*} = \frac{1}{n \cdot \varepsilon_L(r_L^*)}, \tag{8.22}$$

$$\frac{r(1-\alpha) - \gamma_D - r_D^*}{r_D^*} = \frac{1}{n \cdot \varepsilon_D(r_D^*)}. \tag{8.23}$$

Полученные уравнения (8.22)-(8.23) являются дальнейшим обобщением условия равновесия для моделей конкурентной (см. 8.11) и монополистической (8.16-8.17) банковских систем. Можно заметить, что условия равновесия по Курно для модели банковской олигополии отличаются от аналогичных условий в модели монополистического банка только тем, что коэффициент эластичности в знаменатели правой части умножается на число банков *n*.

Таким образом, мы получаем вполне естественный результат: монопольная банковская система представляет собой граничный случай олигопольной при n=1, а конкурентная банковская система – $n = \infty$.

Уравнения (8.22)-(8.23) также можно использовать в качестве критерия уровня «несовершенности» конкуренции в банковском секторе. Они, в частности, позволяют выразить «предельную чувствительность» ставок r_L^* и r_D^* к изменениям ставки межбанковского рынка *r*. Особенно наглядно это можно сделать, если допустить, что эластичности ε_L и ε_D являются постоянными величинами. Тогда на основе (8.22)-(8.23) можно записать:

$$\frac{\partial r_L^*}{r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n\varepsilon_L}} \tag{8.24}$$

и

$$\frac{\partial r_D^*}{r} = \frac{1-\alpha}{1 + \frac{1}{n\varepsilon_D}}. \tag{8.25}$$

Из условий (8.24) – (8.25) видно, что «предельные чувствительности ставок r_L^* и r_D^* к изменениям ставки межбанковского рынка *r* зависят от количества банков *n*. Последнее, в свою очередь, может быть интерпретировано как то, что при увеличении интенсивности конкуренции

(возрастании *n*) процентная ставка по кредитам r_L^* становится менее чувствительной (а процентная ставка по депозитам r_D^* - более чувствительной) к изменениям ставки *r*.

8.2.3 Применение модели Монти-Кляйна для анализа политики регулирования ставки депозитов

В законодательствах подавляющего большинства стран в той или иной форме присутствуют ограничения на размер ставки процентных выплат по депозитам. В настоящем пункте мы остановимся на некоторых аспектах применения модели Монти-Кляйна для изучения последствий политики регулирования депозитной ставки, заключающейся в задании верхнего предела:

$$r_D \le \bar{r}_D.$$

Типичным объяснением смысла такой меры служит довод, что уменьшение стоимости ресурсов для банков вызовет уменьшение тех ставок по кредитам, которые они устанавливают для заемщиков. Спорность данного рассуждения и, в частности, его некорректность в рамках модели Монти-Кляйна будет показана ниже.

Проблему регулирования ставки по депозитам рассмотрим на базе модели банковской монополии. В целях упрощения будем считать, что средствами, депонируемыми коммерческими банке в центральном банке в качестве обязательных страховых резервов, можно пренебречь, т.е. коэффициент $\alpha = 0$. Заметим, что предпосылка о том, что рассматривается банк-монополист, не является принципиальной. Проводимые ниже рассуждения могут быть обобщены для случая олигополии простым умножением эластичностей на количество банков *n*.

Проблему регулирования ставки по депозитам рассмотрим на базе модели банковской монополии. В целях упрощения будем считать, что средствами, депонируемыми обычными банками в центральном банке в качестве обязательных страховых резервов, можно пренебречь, т.е. коэффициент $\alpha = 0$. Заметим, что предпосылка о том, что рассматривается банк-монополист, не является принципиальной. Приводимые ниже рассуждения могут быть обобщены для случая олигополии простым умножением эластичностей на количество банков *n*.

Предположим также, что в отличие от моделей, описанных в предыдущих пунктах, управляющими параметрами для банков являются не объемы депозитов и кредитов *(D* и *L*), а процентные ставки по ним *(r_D* и *r_L).* Тогда традиционная функция прибыли банка

$$\Pi(D,L) = (r_L(L) - r)L + (r - r_D(D)D - C(D,L)) \qquad (8.26)$$

примет вид

$$\Pi(r_D, r_L) = (r_L - r)L(r_L) + (r - r_D)D(r_D) - C(D(r_D),L(r_L)) \qquad (8.27)$$

Если предположить, что функция $\Pi(r_D,\ r_L)$ является вогнутой, то необходимое и достаточное условие для точки ее безусловного максимума (r_D^* , r_L^*) задается уравнениями:

$$\frac{r - r_D^* - C_D^*}{r_D^*} = \frac{1}{\varepsilon_D(r_D^*)}, \qquad (8.28)$$

$$\frac{r - r_L^* - C_L^*}{r_L^*} = \frac{1}{\varepsilon_L(r_L^*)}. \qquad (8.29)$$

Если предположить, что существует $\bar{r}_D$ – ограничение сверху на ставку депозитов, то задача поиска безусловного максимума функции $\Pi(r_D, r_L)$ трансформируется в задачу условной оптимизации с одним связующим ограничением:

$$\max \Pi(r_D, r_L)$$
$$r_D \le \bar{r}_D \qquad (8.30)$$

Если обозначить через $(\hat{r}_D, \hat{r}_L)$ - решение задачи (8.30), то возможны два принципиальных случая:

- $r_D^* \le \bar{r}_D$ - ограничение $r_D \le \bar{r}_D$ не меняет значения оптимальной ставки по депозитам (по сравнению с задачей безусловной максимизации):

$$\hat{r}_D = r_D^*, \qquad \hat{r}_L = \hat{r}_L,$$

т. е. с экономической точки зрения регулирование не имеет практических последствий;

- $r_D^* > \hat{r}_D$— данный случай более интересен, так как решение меняет свою структуру и приобретает вид $(\bar{r}_D, \hat{r}_L)$. При этом оно должно удовлетворять условию:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_L}(\bar{r}_D, \hat{r}_L) = 0. \qquad (8.31)$$

Поскольку $\Pi(r_D,\ r_L)$ вогнутая функция, то существует единственное значение $\hat{r}_L$, являющееся решением уравнения (8.31). При этом (8.31) определяет $\hat{r}_L$ как неявную функцию от аргумента $\bar{r}_D$. Согласно теореме о дифференцировании неявной функции можно записать:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L^2}\frac{d\hat{r}_L}{d\bar{r}_D} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} = 0 \qquad (8.32)$$

Так как значение $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L^2}$ отрицательно, то знак $\frac{d\hat{r}_L}{d\bar{r}_D}$ должен совпадать со знаком $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D}$.

Таким образом, было доказано следующее утверждение:

- ограничение сверху на размер ставки по депозитам вызывает уменьшение процентных ставок по кредитам тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} > 0.$$

С содержательной точки зрения условие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} > 0 \qquad (8.33)$$

соответствует ситуации, когда депозиты и кредиты являются субститутами, т. е. в случае, когда количество кредитов увеличивается (ставка по ним уменьшается), предельная доходность депозитов уменьшается.

По аналогии, условие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} > 0 \qquad (8.34)$$

соответствует ситуации, когда депозиты и кредиты являются *комплементами* — при увеличении количества кредитов предельная доходность по депозитам также увеличивается.

Следующее важное утверждение формулирует свойства политики задания ограничений по депозитной ставке в условиях взаимной независимости предложения кредитов и спроса на депозиты (когда L зависит только от r_L, а D только от r_D):

- если спрос на кредиты и предложение по депозитам являются независимыми друг от друга, а банки имеют доступ к источникам денежных ресурсов с неограниченной эластичностью, то ограничение на ставку депозитов вызывает уменьшение ставки по кредитам тогда, когда

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} > 0.$$

Если же функция издержек управления $C(D, L)$ является аддитивной относительно своих аргументов (сепарабельной):

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} = 0$$

то введение ограничения сверху на ставку депозитов $\bar{r}_D$ не влияет на ставку по кредитам.

Последнее утверждение является непосредственным следствием из предыдущего, если учесть, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_D \partial r_L} = -\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} \cdot L'(r_L) D'(r_D),$$

где $L'(r_L) < 0$ и $D'(r_D) > 0$.

Полученный результат фактически означает, что регулирование ставки депозитов путем задания ограничения сверху в случае сепарабельности функции издержек банка является бессмысленным, так как не может никоим образом повлиять на ставку по кредитам. Более того, предположение, выполнение которого требуется для оправдания осмысленности процесса регулирования ставки по депозитам:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} > 0,$$

оказывается прямо противоположным требованию комплиментарности (взаимодополняемости) издержек:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} < 0.$$

Напомним, что последнее условие используется при обосновании эффекта от объединения в рамках банка как фирмы финансовых услуг деятельности по привлечению депозитов и выдаче кредитов. Другими словами, при выполнении принятых предпосылок узкоспециализированные финансовые институты, занимающиеся только каким-то одним видом деятельности, оказываются более эффективными, чем универсальные.

Однако данный «парадоксальный» результат скорее свидетельствует о несовершенстве той модели, в рамках которой он получен, чем о бессмысленности политики регулирования депозитной ставки. Пути разрешения этого противоречия так или иначе связаны с различными методами учета эффекта замещения между депозитами и кредитами.

В частности, данный эффект может проявиться, если допустить, что ставка межбанковского рынка r меняется в зависимости от объема совокупных резервов банков, представленных на этом рынке. Обозначим их через *R*. Заметим, что поскольку речь идет о поведении банка-монополиста, то можно считать, что для него

$$R = D - L \tag{8.35}$$

В этом случае функция прибыли банка может быть записана в виде:

$$\Pi(r_D, r_L) = r_L L(r_L) - r_D D(r_D) - \Psi(D(r_D), L(r_L)) \tag{8.36}$$

где $\Psi(D,L)$ - функция, задающая «полные» издержки банка как финансового посредника:

$$\Psi(D,L) = C(D,L) + (D - L)\,[r(D,L)] \tag{8.37}$$

или, учитывая (8.35):

$$\Psi(D,L) = C(D,L) + R\,r(R) \tag{8.38}$$

Последний член выражения (8.38), который имеет такой же знак, как и *R*, представляет чистый доход от операций на рынке денег. Взаимозаменяемость кредитов и депозитов достигается, если

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial D \partial L} > 0, \tag{8.39}$$

что эквивалентно неравенству:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} > Rr''(R) + 2r'(R). \tag{8.40}$$

Это условие выполняется, например, тогда, когда функция издержек управления является сепарабельной:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} = 0,$$

а ставка межбанковского рынка — убывающая ($r'(R) < 0$) и вогнутая ($r''(R) \leq 0$) функция от величины чистой позиции *R*.

В заключение разговора о политике регулирования ставки по депозитам отметим, что все приведенные выше рассуждения основываются на предположении о риск-нейтральности банков, которая, допустим, может быть обеспечена за счет диверсификации их портфеля. В случае же принятия гипотезы о ненулевом риске разорения появляются дополнительные аргументы за введение ограничений сверху на размер процентных выплат по депозитам в качестве меры, предостерегающей банки от совершения «опасных» операций.

8.3. О некоторых проблемах построения производственной функции для финансовой фирмы

В настоящем разделе мы остановимся еще на одном аспекте применения прозводственно-организационного подхода к описанию банковской деятельности. Если во всех ранее рассмотренных моделях производственная банка предполагалась априорно заданной, то теперь мы обратим внимание именно на методы ее конструирования.

Можно выделить два глобальных направления в исследованиях, посвященных методам построения банковских производственных функций:

- моделирование без учета посреднической деятельности;
- моделирование с учетом посреднической деятельности.

8.3.1. Построение производственных функций без учета посреднической деятельности

Исторически данный подход берет свое начало от работ Бенстона, Белла и Мэрфи (*Benston, Bell, Murhy)*[1]. В соответствии с ним депозиты, привлекаемые банком от вкладчиков,

[1] *Bell F. W., Murphy N.B.* Economies of scale and division of labor commercial banking // *National Banking Review*, vol. 5 pp. 131-139, 1968.

и кредиты, предоставляемые им заемщикам, рассматриваются как выходные параметры его деятельности, а расходы на оплату сотрудников, капитальные вложения и т.п. – как входные. В упомянутых работах на основе данных программы *Функционально-стоимостного анализа,* осуществляемого Федеральной резервной системой США, были построены независимые функции издержек для различных видов банковских ресурсов: депозитов до востребования, срочных и сберегательных депозитов, капитальных, потребительских и бизнес-кредитов. Напомним, что ключевым моментом программы Функционально-стоимостного анализа как раз и является выделение из совокупных затрат тех долей, которые идут на отдельные виды деятельности.

Для оценки затрат на ту или иную банковскую услугу Бенстон, Белл и Мерфи предложили использовать функциональную зависимость типа Кобба-Дугласа:

$$C_i = const \cdot Q_i^{\varepsilon_i} w_i^{a_i} r_i^{(1-a_i)},$$

которая легко может быть «линеаризована» за счет логарифмирования:

$$\log C_i = \varepsilon_i \log Q_i + a_i \log w_i + (1-a_i)\log r_i + const,$$

где i – индекс вида деятельности (депозиты до востребования, срочные депозиты и т.п.)

C_i – полные затраты на i-й вид деятельности;

w_i – объем затрат на оплату труда, приходящийся на i-й вид деятельности;

r_i - объем капитальных затрат, приходящихся на i-й вид деятельности;

8.3.2. Построение производственных функций, учитывающих посредническую деятельность

Данный класс методов и подходов к построению производственной функции в отличии от предыдущего предполагает учет на содержательном уровне результатов деятельности банков как финансовых посредников. В первую очередь речь идет о трансформации активов: временном и рисковом преобразовании денежных средств, собранных у вкладчиков, в денежные средства, предлагаемые заемщикам. На концептуальном уровне такой подход к конструированию производственных функций более адекватно отражает специфику задач, решаемых банком. Он получил развитие в ряде работ [1].

При построении производственной функции для банка (финансовой фирмы) весьма существенной является проблема классификации рассматриваемых факторов на входные и выходные. С этой точки зрения представляет интерес подход к решению задач классификации, предлагаемый в работе Д. Хэнкок (*Hancock*)[2]. В ней вводится термин *издержек использования финансового ресурса (user of financial good),* под которым понимаются чистые издержки (или, соответственно, доходы) от владения (содержания) единицы данного ресурса (услуги) в течение рассматриваемого периода времени. В качестве ресурсов, которыми владеет банк (финансовая фирма), как правило, берутся статьи балансового отчета.

Benston G. I. Branch banking and economices of scale // *Journal of Finance,* vol. 20, pp. 312-331, 1965.

[1] *Benston G. I., Hanweck G. A. Humphrey D.* Scale economies in banking // *The Journal of Money, Credit and Banking,* vol. 14(1), pp. 435-546, 1982.

Kim M. Banking technology and existence of a consistent output aggregate // *Journal of Monetary Economics,* vol. 18(2), pp. 181-185, 1986.

Mester L. A multiproduct cost study of saving and loans // *Journal of Finance,* vol. 42(2), pp. 423-445, 1987.

Murray J.. D., White R. W. Economies of scale and economies of scope in multi-product financial institutions: A Study of British Columbia credit unions // *Journal of Finance,* vol. 38(3), pp. 887-902, 1983.

[2] *Hancock D.* A Theory of Production for the Financial Firm. Norwell (Mass.), Kluver Academic Publishers, 1991.

Если обозначить через

$y_{i,t}$ – объем i-го ресурса в t – ом периоде, где $i=\overline{1,N_1}$ - индексы, соответствующие активам, а $i=\overline{N_1+1,N_1+N_2}$ - индексы, соответствующие обязательствам;

$h_{i,t}$ – нормы доходов для активов ($i=\overline{1,N_1}$) и нормы затрат для обязательств ($i=\overline{N_1+1,N_1+N_2}$) в t – ом периоде;

b_i – знаковый коэффициент: b_i = -1 для активов ($i=\overline{1,N_1}$) и b_i = 1 для обязательств ($i=\overline{N_1+1,N_1+N_2}$);

P_t – общий индекс цен для t – го периода,

то общая прибыль банка от обладания в t – ом периоде некоторым набором финансовых ресурсов может быть выражена как

$$\pi_t=-\sum_{i=1}^{N_1+N_2} b_i\cdot[(1+h_{i,t-1})\cdot y_{i,t-1}\cdot P_{t-1}-y_{i,t}\cdot P_t]. \quad (8.41)$$

Тогда, если R_s – коэффициент дисконтирования для s – го периода, то коэффициент приведения затрат (доходов) t – го периода на начальный момент времени может быть выражен как

$$d_t=\prod_{s=1}^{t}\frac{1}{1+R_s} \quad (8.42)$$

где R_s = 0 при s=t, а общий объем капитализированной прибыли, приведенной к начальному моменту, за периоды $t = 2,\ldots,T$ примет вид

$$\Pi(Y)=\sum_{t=2}^{T}d_t\pi_t=-\sum_{t=2}^{T}\sum_{i=1}^{N_1+N_2}d_t\cdot b_t\cdot[(1+h_{i,t-1})\cdot y_{i,t-1}\cdot P_{t-1}-y_{i,t}\cdot P_t], \quad (8.43)$$

где $Y=\|y_{i,t}\|_{N_1+N_2,T}$.

Выражение (3.4.3) можно переписать, сгруппировав коэффициенты при переменных $y_{i,t}$:

$$\Pi(Y)=\sum_{i=1}^{N_1+N_2} b_i\cdot[-d_1\cdot(1+h_{i,1})\cdot y_{i,1}\cdot P_1-\sum_{t=2}^{T-1}[-d_t\cdot P_t+d_{t+1}\cdot(1+h_{i,t})\cdot P_t]\cdot y_{i,t}+d_T\cdot y_{i,T}\cdot P_t]. \quad (8.44)$$

Но так как

$$d_{t+1}=d_t\cdot\frac{1}{1+R_t}, \quad (8.45)$$

то, представив $\Pi(Y)$ как линейную функцию от Y с некоторыми коэффициентами $u_{i,t}$, имеющими смысл стоимостей использования i – го актива (обязательства) в t – й период, а именно

$$\Pi(Y)=\sum_{i=1}^{N_1+N_2} b_i\cdot[-d_1\cdot(1+h_{i,1})\cdot y_{i,1}\cdot P_1-\sum_{t=2}^{T-1}u_{i,t}\cdot y_{i,t}+d_T\cdot y_{i,T}\cdot P_t], \quad (8.46)$$

можно в явном виде получить выражения для них (с учетом знакового коэффициента b_i):

$$u_{i,t}=-b_i\cdot P_t\cdot\frac{R_t-h_{i,t}}{1+R_t} \quad (8.47)$$

или

$$\frac{u_{i,t}}{P_t}=\frac{R_t-h_{i,t}}{1+R_t},\quad i=\overline{1,N_1}; \quad (8.48)$$

$$\frac{u_{i,t}}{P_t}=\frac{h_{i,t}-R_t}{1+R_t},\quad i=\overline{N_1+1,N_1+N_2}. \quad (8.49)$$

Исходя из того, что при $u_{i,t} > 0$ происходит уменьшение прибыли, а при $u_{i,t} < 0$ – ее увеличение, предлагается в первом случае рассматривать i – й ресурс как вход, а во втором – как выход.

Контрольные вопросы

(выберите правильный ответ)

1. Основываясь на предпосылках простейшей микроэкономической модели поведения банка в условиях совершенной конкуренции, ответьте на вопрос об оптимальной стратегии банка (в смысле привлечении депозитов и выдачи кредитов) с целью получения максимальной прибыли?

а) оптимальная стратегия сводится к выполнению условия $\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} > 0$;

б) банк будет привлекать депозиты в таком объеме D^*, чтобы предельные издержки на управление ими равнялись $r(1-\alpha) - r_D$. Соответственно, кредиты будут выдаваться в таком объеме L^*, чтобы предельные издержки на управление ими равнялись $r_L - r$.

в) оптимальная стратегия сводится к выполнению условия $\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} < 0$;

г) банк будет привлекать депозиты в таком объеме D^*, чтобы предельные издержки на управление ими равнялись $r(1-\alpha) - r_D$;

д) кредиты будут выдаваться в таком объеме L^*, чтобы предельные издержки на управление ими равнялись $r_L - r$.

2. Какой вывод следует из модели Монта-Кляйна, описывающей поведение банка в условиях монополии?

а) кредиты будут выдаваться в таком объеме L^*, чтобы предельные издержки на управление ими равнялись $r_L - r$.

б) кредитный и депозитный рынки обладают независимыми характеристиками для состояния равновесия;

в) при возрастании ставки межбанковского рынка ставки по кредитам и депозитам также возрастают;

г) появление на финансовом рынке заменителей (субинститутов) банковских услуг может оказать неблагоприятное влияние на предельные издержки банка по управлению кредитами и депозитами;

д) банк-монополист будет устанавливать объемы предлагаемых им кредитов (L) и депозитов (D) таким образом, чтобы выполнялось условие равенства индексов Лернера обратным эластичностям;

3. Какие выводы, касающиеся последствий политики регулирования ставки процентных выплат по депозитам, следуют исходя из модели Монти-Кляйна?

а) банки имеют доступ к источникам денежных ресурсов с неограниченной эластичностью;

б) ограничение не меняет значения оптимальной ставки по депозитам;

в) ограничение сверху на размер депозитной ставки r_D вызывает уменьшение процентных ставок по кредитам r_L тогда и только тогда, когда относительно функции прибыли банка выполняется условие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_l \partial r_D} > 0.$$

г) вызывает уменьшение ставки по кредитам;

д) регулирование не имеет практических последствий.

4. При каком условии ограничение сверху на размер ставки по депозитам вызывает уменьшение процентных ставок по кредитам ?

а) При условии $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} < 0$;

б) при условии $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} > 0$;

в) при условии $\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} < 0$;

г) при условии $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} = 0$;

д) при условии $\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} = 0$.

5. При каком условии ограничение на ставку депозитов вызывает уменьшение ставки по кредитам, если спрос на кредиты и предложение по депозитам являются независимыми друг от друга, а банки имеют доступ к источникам денежных ресурсов с неограниченной эластичностью,

а) не при каком условии.

б) при условии $\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} < 0$;

в) при условии $\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} = 0$;

г) при условии $\frac{\partial\ C}{\partial D} > 0$;

д) при условии $\frac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} > 0$;

6. Что можно сказать о равновесии в финансовом секторе в условиях высокой конкуренции и непрозрачности информации об уровне и качестве услуг?

а) равновесие может оказаться менее привлекательным с точки зрения клиентов (депозиторов), чем равновесие, возникающее в случае существования банков, обладающих филиальной сетью;

б) равновесие может оказаться более привлекательным;

в) приведет к избыточному количеству банков;

г) банки будут предлагать своим клиентам контракты с более низкими ставками по кредитам;

д) ничего сказать нельзя.

7. Предпосылки модели Монти-Кляйна?

а) банк обладает возможностями по изменению величин процентных ставок на кредиты и депозиты (r_L и r_D);

б) банк обладает возможностями по изменению величин процентных ставок на кредиты (r_L);

в) банк обладает возможностями по изменению величин процентных ставок на депозиты (r_D);

г) функция $L(r_L)$ является убывающей;

д) функция $D(r_D)$ является возрастающей.

8. Прибыль, получаемая банком – монополистом, и необходимые условия максимума прибыли?

а) $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} = 0$;

б) $\dfrac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} = 0$;

в) $\pi(D,L) = (r_L(L) - r)L + (r(1 - \alpha) - r_D(D))D - C(D,L)$

Необходимые условие максимума функции прибыли $\pi(D,L)$ имеет вид:

$$\frac{\partial \pi}{\partial D} = -r_D^I(D)D + r(1-\alpha) - r_D) - r_D - \frac{\partial C(D,L)}{\partial D} = 0,$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = r_L^I(L)L + r_L - r - \frac{\partial C(D,L)}{\partial L} = 0.$$
;

г) $\pi(D,L) = (r_L(L) - r)L + (r(1 - \alpha) - r_D(D))D - C(D,L) = 0$;

д) не существыует.

9. Необходимые условие максимума функции прибыли в условиях олигополии?

а) $\dfrac{\partial^2 C}{\partial D \partial L} = 0$;

б) $\dfrac{\partial \pi_j}{\partial D_j} = -r_D^I(D^*)\dfrac{D^*}{n} + r(1-\alpha) - r_D(D^*) - \gamma_D = 0,$

$\dfrac{\partial \pi_j}{\partial L_j} = r_L^I(L^*)\dfrac{L^*}{n} + r_L(L^*) - r - \gamma_L = 0.$;

в) $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial r_L \partial r_D} = 0$;

г) $\pi(D,L) = (r_L(L) - r)L + (r(1 - \alpha) - r_D(D))D - C(D,L) = 0$;

д) не существует.

10. Как зависят предельные чувствительности ставок r_L^* и r_D^* к изменениям ставки межбанковского рынка *r* зависят от количества банков *n*?

а) при увеличении интенсивности конкуренции (возрастании *n*) процентная ставка по кредитам r_L^* становится менее чувствительной (а процентная ставка по депозитам r_D^* - более чувствительной) к изменениям ставки *r*;

б) при уменьшении интенсивности конкуренции (возрастании *n*) процентная ставка по кредитам r_L^* становится менее чувствительной (а процентная ставка по депозитам r_D^* - более чувствительной) к изменениям ставки *r*;

в) при увеличении интенсивности конкуренции (возрастании *n*) процентная ставка по кредитам r_L^* становится более чувствительной (а процентная ставка по депозитам r_D^* - более чувствительной) к изменениям ставки *r*;

г) при уменьшении интенсивности конкуренции (возрастании *n*) процентная ставка по кредитам r_L^* становится более чувствительной (а

процентная ставка по депозитам r_D^* - более чувствительной) к изменениям ставки *r*;

д) не зависят.

ТЕМА 9. МОДЕЛИ БАНКА КАК СОВОКУПНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФИНАНСОВЫХ ПРОЦЕССОВ

9.1. Банк как совокупность стохастических финансовых потоков

Общей чертой моделей, излагавшихся выше подходов, является то, что они описывают деятельность банка в целом, представляя его в обобщенном виде. Теперь мы остановимся на методах, ориентированных на более подробное изучение закономерностей процессов, протекающих внутри финансовых институтов. В частности, особое внимание будет уделено средствам решения задач, возникающих в ходе привлечения депозитных финансовых ресурсов.

Очевидно, что как внешние условия, сопутствующие деятельности банка (финансовой фирмы), так и процессы, протекающие внутри него, являются результатом сложных и неоднозначных взаимодействий огромного числа факторов, причин, зависимостей и закономерностей, большинство из которых имеет случайную (вероятностную) природу. Следствием этого является то, что работа банков в значительной мере сопряжена с риском и неопределенностью. В связи с этим достаточно привлекательными и конструктивными представляются идеи, касающиеся использования в экономико-математических моделях банковских структур инструментального аппарата теории вероятностей, математической статистики и теории массового обслуживания.

Достаточно хорошо зарекомендовали себя в этой области методы, связанные с подходом к описанию банка как совокупности стохастических финансовых потоков.

9.1.1. Основные концепции стохастического моделирования финансовых потоков

Способы, с помощью которых может быть описано текущее состояние банка или какого-либо иного финансового института, весьма разнообразны. Однако, наверное, одним из самых логически простых и естественных будет его представление с помощью вектора состояния или, как еще говорят, вектора характеристик:

$$x = (x_v\, x_2, \ldots, x_n).$$

Количественный и качественный состав компонент вектора x определяется степенью детализации представления банка в модели. Это может быть, допустим, объем депозитов до востребования или же объем конкретного вклада, принадлежащего конкретному лицу.

Фактически данная форма описания состояния банка с содержательной точки зрения адекватна обычному банковскому балансу: компоненты вектора характеристик x могут интерпретироваться как обычные статьи баланса, а их количество и структура соответствуют уровню его агрегированности (ежедневный, включающий счета второго порядка, или укрупненный квартальный).

Конкретные значения каждой из компонент x_j вектора состояниям определяются выбором единиц измерения для соответствующего ресурса (характеристики). Очевидно, что в подавляющем большинстве случаев это денежные измерители в той или иной валюте, но, в принципе, возможны и иные формы учета. Например, через перечисление видов, количества и номиналов облигаций или же через указание числа мерных слитков, веса драгоценных камней и т. п. Для обобщения допустимых способов исчисления значений компонент вектора состояний x может быть введено понятие ресурсных единиц. Другими словами, состояние отдельного j-го ресурса отождествляется с некоторым элементом множества неотрицательных действительных чисел R_+^n = $[0,+\infty)$, геометрическим образом которого является положительная полуось вещественной прямой. Таким образом, состояние банка в целом может быть представлено некоторой точкой неотрицательного ортанта n-мерного евклидова пространства:

$$x \in R_+^n = \{x = (x_l,\dots,x_j,\dots,x_n) \backslash x_j \in R_+^{'} \}.$$

Множество всех возможных (допустимых) точек (векторов) x образует пространство состояний банка.

$$X = \{x\} \subset R_+^n .$$

На основе элементов вектора x, представляющих собой первичные характеристики состояния банка, могут быть получены некоторые производные (вторичные) характеристики

$$y = (y_1,\dots,y_i,\dots,y_m) \in R^m.$$

Очевидно, что вектор производных характеристик y при таком задании является функцией от вектора исходных характеристик

$$y = f(x)$$

В качестве типичного примера вторичных характеристик состояния банка может быть приведена система обязательных финансовых нормативов (коэффициентов), устанавливаемых центральными банками или иными регулирующими органами.

Для того чтобы обеспечить в модели учет фактора времени, следует задать некоторое множество T, элементы которого $t \in T$ будем называть моментами времени. Особо подчеркнем высокий уровень абстракции такого способа ввода понятия «время», относительно которого существует и развивается моделируемая система. Очевидно, что данное определение охватывает в качестве частных случаев как непрерывное, так и дискретное время. Традиционно в качестве модели «непрерывного физического» времени используется множество точек бесконечной одномерной действительной числовой оси R^1 с фиксированным началом отсчета, а множество всех учитываемых моментов времени T в этом случае представляет собой некоторый отрезок на этой оси (замкнутый или отрытый):

$$T = [T\_, T_+] \text{ или } T = (T\_, T_+).$$

При задании в модели банка непрерывного времени состояние j-й характеристики может рассматриваться как значение функции $x_j(t)$, определенной на множестве T и принимающей значения из множества R_+^1. Тогда график $x_j(t)$ играет роль траектории изменения во времени j-й характеристики. Соответственно, состояние банка в целом есть значение векторной функции от времени

$$x(t\} = (x_{\{}(t\backslash\dots,x_j(t)\dots_1 x_n(t)) \qquad (9.1)$$

а траектория системы $\{x(t)\}_{t\in T}$ представляет собой некоторую кривую в n-мерном пространстве. Каждая точка такой траектории является элементом пространства возможных состояний банка X.

На основе введенных выше понятий может быть определен принципиально новый термин – «поток».

- Поток (*flow)* — экономическая величина, которая измеряется в движении с учетом рассматриваемого временного интервала. Размерность потока — это объем, деленный на время. В то же время объем (*stock, volume*) — величина, характеризующая значение какого-либо показателя на некоторый фиксированный момент времени.

Содержательная сторона понятия «поток» связана с понятием скорости изменения состояния системы. Если предположить, что функции $x_j(t)$, задающие траектории изменения характеристик состояния банка, являются «гладкими», то есть дифференцируемыми во всех точках промежутка $T = (T_{-}, T_{+})$, то соответствующие первые производные

$$x_j^{'}(t) = \frac{dx_j(t)}{dt} \tag{9.2.}$$

могут быть интерпретированы как скорости изменения этих характеристик. Учитывая, что $x_j(t)$ является не чем иным, как объемом j-го ресурса, выраженным в некоторых ресурсных единицах (р. е.), то функция $\dot{x}_j(t) = x_j^{'}(t)$ представляет собой ресурсный поток, определяющий в каждый момент времени t скорость изменения величины ресурса (j-й компоненты состояния банка) в ресурсных единицах, деленных на единицы измерения времени. Например, в рублях в день. При рассмотрении конкретного ресурса мы получаем конкретные виды потоков: финансовый поток, денежный поток, поток наличности и т. п.

Динамика банка в целом может быть описана с помощью векторного ресурсного потока

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t),...,\dot{x}_j(t),...,\dot{x}_n(t)),$$

задающего вектор скоростей изменения состояний изучаемого объекта в пространстве R^n. При этом значение отдельной характеристики объекта (j-й компоненты вектора состояния) для любого момента времени $t \in (T_{-}, T_{+})$ определяется по формуле

$$x_j(t) = \int_{T_{-}}^{t} \dot{x}_j(\tau) d\tau \,. \tag{9.3}$$

С введением понятия ресурсного потока мы получаем возможность сформулировать модель, базирующуюся на представлении банка как системы (вектора) первичных ресурсных потоков

$$x(t) = (x_1(t),...,x_j(t),...,x_n(t), \;\; t \in (T_{-}, T_{+}) \tag{9.4}$$

Модель (9.4) является альтернативой модели (9.1), в основе которой лежит система (вектор) состояний. Основываясь на формулах (9.2) и (9.3), можно прийти к заключению, что оба способа формализованного представления банка при выполнении условий дифференцируемости функций $x_j\,(t)$ являются эквивалентными.

Следующий шаг в процессе совершенствования рассматриваемого класса моделей связан с учетом в них факторов риска и неопределенности.

Для описания неопределенности, присутствующей в траектории состояний, в которых может оказаться исследуемый объект, удобно воспользоваться терминологией теории случайных процессов. Под случайным процессом (случайной функцией времени, «стохастический процесс» или «вероятностный процесс») понимается функция $\tilde{x}(t)$, которая может иметь ту или иную конкретную реализацию (траекторию) из некоторого фиксированного множества возможных траекторий $X = \{x(t,\theta) | \theta \in \Theta\}$.

Обобщая сказанное, получаем, что в условиях неопределенности моделью динамики состояния банка может служить векторный случайный процесс

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t),...,\tilde{x}_j(t),...,\tilde{x}_n(t),$$

каждая компонента $x_j(t)$ которого описывает стохастическую динамику j-й характеристики (ресурса) банка. По аналогии, фактор неопределенности, присутствующий в системе ресурсных потоков банка, может быть описан в формализованном виде при помощи векторного случайного процесса

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (\dot{\tilde{x}}_1(t),...,\dot{\tilde{x}}_j(t),...,\dot{\tilde{x}}_n(t)), \quad t \in (T_{-}, T_{+}).$$

Одновременно заметим, что модели, основывающиеся на задании стохастических процессов в общем виде, имеют исключительно теоретическое значение и предназначены лишь для изложения на принципиальном уровне идей применения соответствующего математического аппарата. Исследования, направленные на содержательный анализ закономерностей работы банков, так или иначе должны опираться на предпосылки, конкретизирующие тип и параметры используемых в них случайных величин и функций. Ряд частных примеров, базирующихся на данном подходе, будет приведен в последующем изложении.

9.1.2. Мультипликативные стохастические модели

Рассмотрение моделей управления привлеченными ресурсами в финансовой фирме логично начать с моделей, носящих описательный характер, т. е. отражающих тенденции в поведении величины того или иного ресурса безотносительно к сознательным управляющим воздействиям на нее. Очевидно, изменения таких величин являются результатом влияния очень широкого различных по своей природе факторов, носящих как по силе так и по природе своего проявления случайный характер, что и предопределяет использование для отражения процесса изменения объемов финансовых ресурсов банка теории оптимального управления и теории случайных процессов.

9.1.3. Простейшая мультипликативная стохастическая модель динамики финансового ресурса (см. файл LB7)

Исследование моделей поведения объемов ресурсов финансовой фирмы начнем с наиболее простой стохастической модели для отдельно взятого ресурса. В качестве наблюдаемого ресурса могут выступать, как привлеченные средства в целом, так и депозиты до востребования, срочные депозиты и т.д.

В основе исследуемой модели лежит предпосылка о возможности отслеживать объемы изучаемого ресурса через дискретные равноотстоящие промежутки времени t. Обозначим через x_t – объем в момент времени t.

Предположим, , что переход объема ресурса от момента времени $t = i – 1$ к моменту времени $t = i$, описывается соотношением

$$x_i = \alpha_i \cdot x_{i-1} \ , \tag{9.5}$$

где $\alpha_i > 0$ - положительный коэффициент элементарного перехода от x_{i-1} к x_i , $i = 1,...,n$. Из соотношения (4.2.1) следует формула

$$x_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \tag{9.6}$$

Эта формула может быть интерпретирована как ***мультипликативная модель ресурса*** на дискретном отрезке времени [0,n].

Если наблюдаемые значения $\alpha_1,...,\alpha_n$ коэффициентов элементарных переходов интерпретировать как значения соответствующих случайных величин $\tilde{\alpha}_1,...,\tilde{\alpha}_n$, то формула (9.6) дает следующую стохастическую мультипликативную модель динамики ресурса на дискретном отрезке времени [0,n]:

$$\tilde{x}_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \ . \tag{9.7}$$

где $\tilde{x}_n$ - случайное значение величины ресурса в момент времени $t = n$.

Предположим, что все случайные коэффициенты элементарных переходов независимы, и каждый из этих коэффициентов имеет логарифмически нормальное распределение $\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu_i, \sigma_i))$. Иными словами, предполагается, что натуральный логарифм случайной величины $\tilde{\alpha}_i$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $M(\ln\tilde{\alpha}_i) = \mu_i$ и с дисперсией $D(\ln\tilde{\alpha}_i = \sigma_i^2 \quad (\ln\tilde{\alpha}_i \in N(\mu_i, \sigma_i^2))$.

Знание плотности распределения

$$f(\alpha;\tilde{\alpha}_i)=\frac{1}{\alpha\sigma_i\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln\alpha-\mu_i)}{2\sigma_i^2}\right],\ \alpha>0\,, \tag{9.8}$$

случайной величины $\tilde{\alpha}_i$ позволяет найти математическое ожидание

$$m_i=M\tilde{\alpha}_i=\int_0^{+\infty}\alpha f(\alpha;\tilde{\alpha}_i)d\alpha=\exp\left(\mu_i+\frac{\sigma_i^2}{2}\right), \tag{9.9}$$

второй начальный момент

$$M\tilde{\alpha}_i^2=\int_0^{+\infty}\alpha^2 f(\alpha;\tilde{\alpha}_i)d\alpha=\exp(\mu_i+2\sigma_i^2) \tag{9.10}$$

и дисперсию

$$s_i^2=D\tilde{\alpha}_i^2=M\tilde{\alpha}_i^2-m_i^2=\exp(2\mu_i+2\sigma_i^2)-\exp(2\mu_i+\sigma_i^2) \tag{9.11}$$

случайного коэффициента элементарного перехода.

9.2. Рекуррентные модели динамики финансовых ресурсов

Основной целью настоящего параграфа является развитие модели финансовой фирмы в направлении учета фактора времени и исследование тех закономерностей, которые вносят в стратегию привлечения средств связующие ограничения на ресурсы системы для смежных этапов ее функционирования. При переходе к ***рекуррентной динамической модели*** сразу следует отметить, что прибыль, получаемая фирмой на отдельных этапах, не может быть единственным оценочным показателем ее деятельности – помимо ее необходимо учитывать также и такие характеристики, как величина собственных средств (капитала) фирмы, темпы его изменения и т.п.

Введем обозначения:

t - индекс периода $(t\in\overline{1,T})$;

q_t - объем собственных средств фирмы в t – м периоде;

x_t – объем привлеченных средств в t – м периоде;

v – усредненная норма затрат на единицу привлеченных средств;

u – усредненная норма дохода на единицу используемых средств;

θ - для собственных средств, превращаемых в активы, т.е. используемых для получения дохода.

Тогда

$v\cdot x_t$ - затраты на привлечение средств в t – м периоде;

$u\cdot(\theta\cdot q_{t-1}+x_t)$ - доход t – го периода,

и величина собственных средств определяется рекуррентным соотношением

$$q_{t+1}=q_t+u\cdot(\theta\cdot q_t+x_{t+1})-v\cdot x_t\,. \tag{9.12}$$

Соотношение (9.12) с математической точки зрения является линейным разностным уравнением, для решения которого может быть, в частности, применено z-преобразование.

Напомним, что z-преобразованием функции дискретного аргумента $f(k)=f_k$, $k=0,1,\ldots$ называется функция

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k\cdot z^{-k}\,,$$

определенная на некоторой области комплексного аргумента z.

Приведем выражение (9.12) к виду

$$q_{t+1}=(1+u\cdot\theta)\cdot q_t+u\cdot x_{t+1}-v\cdot x_t \tag{9.13}$$

или

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = u \cdot x_{t+1} - v \cdot x_t \ , \tag{9.14}$$

где

$$\rho = 1 + u \cdot \theta \, . \tag{9.15}$$

Величину ρ можно интерпретировать как *норму накопления собственных средств банка (финансовой фирмы) за один период.*

9.2.1. Многоэтапная динамика на базе мультипликативной модели стохастической модели

Рассмотрим относительно простую ситуацию. Будем считать, что объемы привлеченных средств по периодам являются некоторым внешним фактором, динамика которого может быть описана с помощью мультипликативной стохастической модели.

Тогда объем привлеченных средств в период t + 1 можно представить как

$$x_{t+1} = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i \tag{9.16}$$

где коэффициенты приращения $\tilde{\alpha}_i$- случайные величины, распределенные по логарифмически нормальному закону с параметрами μ_i и σ_i, причем предполагается, что μ_i зависят от v $\tilde{\alpha}_i \in Ln(\mu_i(v), \sigma_i))$. Тогда уравнение (9.14) приобретает вид

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_{i+1} - v) \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i \ . \tag{9.17}$$

Решение данного уравнения можно найти, используя метод Дюамеля для *z*-преобразования. С этой целью рассмотрим вспомогательное уравнение

$$g_{t+1} - \rho \cdot g_t = \delta_t, \quad g_0 = 0 \, , \tag{9.18}$$

где

$$\delta_e = \begin{cases} 1, & \text{если } \ t = 0; \\ 0, & \text{если } \ t > 0. \end{cases} \tag{9.19}$$

Пусть $g_t \to G(z)$ и $\delta_t \to 1$ *z*-преобразования функций g_t и δ_t. Тогда $g_{t+1} \to z \cdot G(z)$, и изображающее уравнение для (4.3.7) примет вид

$$z \cdot G(z) - \rho \cdot G(z) = 1. \tag{9.20}$$

Следовательно,

$$G(z) = \frac{1}{z - \rho} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z - \rho}. \tag{9.21}$$

Оригиналом для $\dfrac{z}{z - \rho}$ служит последовательность ρ^t. Стало быть, по известным свойствам *z*-преобразования имеем

$$g_t \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0; \\ \rho^{t-1}, & \text{если } \ t > 0 \end{cases} \tag{9.22}$$

Чтобы привести уравнение (4.3.6) к нулевому начальному условию, введем новую переменную $h_t = q_t - q_0$. Если положить

$$\tilde{A}_t = x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_t - v) \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i \tag{9.23}$$

то уравнение для h_t примет вид

$$h_{t+1} - \rho \cdot h_t = \tilde{A}_t + (\rho - 1) \cdot q_0. \tag{9.24}$$

Обозначим $H(z)$ – z-преобразование h_t и $F(z)$ – z-преобразование $\tilde{A}_t + (\rho - 1)\cdot q_0$. Тогда изображающее уравнение для уравнения (4.3.13) примет вид

$$z\cdot H(z) - \rho\cdot H(z) = F(z). \qquad (9.25)$$

Рассматривая совместно уравнения (4.3.9) и (4.3.14), получим

$$H(z) = G(z)\cdot F(z). \qquad (9.26)$$

Это означает, что последовательность h_t , являющаяся оригиналом для $H(z)$, может быть найдена как свертка оригиналов g_t и $\tilde{A}_t + (\rho - 1)\cdot q_0$, т.е.

$$h_t = \sum_{i=0}^{t}(\tilde{A}_i + (\rho - 1)\cdot q_0)\cdot g_{t-i} = \sum_{i=0}^{t-1}(\tilde{A}_i + (\rho - 1)\cdot q_0)\cdot \rho^{t-i-1}. \qquad (9.27)$$

После элементарных преобразований выражение (9.27) принимает вид

$$h_t = q_0\cdot(\rho^t - 1) + \sum_{i=0}^{t-1}\tilde{A}_i\cdot\rho^{t-i-1}. \qquad (9.28)$$

Таким образом, найдено решение разностного уравнения (4.3.6)

$$q_t = q_0\cdot\rho^t + x_0\cdot(u\cdot\tilde{\alpha}_{t+1} - v)\cdot\sum_{i=0}^{t-1}\left[(\prod_{j=1}^{i}\tilde{\alpha}_j)\cdot\rho^{t-i-1}\right]. \qquad (9.29)$$

В том случае, когда коэффициенты элементарного перехода имеют одинаковое распределение для всех моментов t $\tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}$, решение (9.29) принимает вид

$$q_t = q_0\cdot\rho^t + x_0\cdot(u\cdot\tilde{\alpha}_{t+1} - v)\cdot\sum_{i=0}^{t-1}\left[\tilde{\alpha}^i\cdot\rho^{t-i-1}\right] = q_0\cdot\rho^t + x_0\cdot(u\cdot\tilde{\alpha}_{t+1} - v)\cdot\frac{\tilde{\alpha}^t - \rho^t}{\tilde{\alpha}}. \qquad (9.30)$$

Используя результаты, полученные для стохастических мультипликативных моделей, прогноз величины привлеченных средств на момент $t + 1$ может быть выражен как

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{A}^t\cdot x_0, \qquad \bar{A} = \exp\left(\bar{\mu}_0 + \frac{\bar{\sigma}_0^2}{2}\right), \qquad (9.31)$$

где x_0 – объем привлеченных средств на начальный момент времени;

$\bar{\mu}_0,\ \bar{\sigma}_0$ - оценки значений параметров $\mu,\ \sigma$, соответственно.

В силу предположения о взаимной независимости коэффициентов перехода α_t, заменив их в формуле (9.30) соответствующими оценками, получим выражение для прогнозирования объема собственных средств на момент t

$$\bar{q}_t = q_0\cdot\rho^t + x_0\cdot\frac{u\cdot\bar{A} - v}{\bar{A} - \rho}\cdot(A^t - \rho^t), \qquad (9.32)$$

где значение $\bar{A}$ может быть получено из (9.31).

В частном случае, если $\rho = \bar{A}$, после раскрытия неопределенности $\dfrac{\bar{A}^t - \rho^t}{\bar{A} - \rho}$ выражение (9.32) имеет более компактную форму

$$\bar{q}_t = q_0\cdot\bar{A}^t + x_0\cdot(u\cdot\bar{A} - v)\cdot t\cdot\bar{A}^{t-1}. \qquad (9.33)$$

Формулы (9.32) и (9.33) имеют прозрачную экономическую интерпретацию – объем собственных средств финансовой фирмы на момент времени t зависит, в рамках предложенной модели, от двух составляющих:

- $q_0\cdot\rho^t$ - величины начального капитала с учетом проводимой политики накопления;
- $x_0\cdot\dfrac{u\cdot\bar{A} - v}{\bar{A} - \rho}\cdot(A^t - \rho^t)$ - результатов деятельности по привлечению средств и получению доходов от их активного использования.

9.2.2. Рекуррентные динамические модели с учетом возможностей управления привлекаемыми средствами

Рассмотрим более сложную ситуацию, в которой присутствует зависимость между затратами на привлечение средств и их объемов, т.е. другими словами, существует возможность управления количеством привлекаемых средств x за счет изменения нормы затрат v.

Предположим, что зависимость между ними может быть описана с помощью функции вида

$$x = \varphi(v) = c \cdot (1 - (1 + \alpha \cdot v) \cdot \exp(-\alpha v)\,. \tag{9.34}$$

Подставив (9.34) в (9.12), получим

$$q_{t+1} = (1 + u \cdot \theta) \cdot q_t + (u - v) \cdot x\,, \tag{9.35}$$

что, учитывая (9.15) и обозначив

$$A = (u - v) \cdot x\,, \tag{9.36}$$

можно записать в виде соотношения

$$q_{t+1} - \rho \cdot q_t = A\,. \tag{9.37}$$

Зададим z-преобразование $q_t \to Q(z)$. Тогда, используя его свойство

$$f_{k+m} \to z^m (F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f_i \cdot z^{-i})\,, \tag{9.38}$$

получаем

$$q_{t+1} \to z \cdot (Q(z) - q_0). \tag{9.39}$$

Правая часть (8.37) может быть представлена как произведение $A \cdot \eta_t$, где

$$\eta_t = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0, \end{cases} \tag{9.40}$$

есть функция, для которой существует стандартное (табличное) преобразование

$$\eta_t \to \frac{z}{z-1}\,, \tag{9.41}$$

и соответственно

$$A \cdot \eta_t \to \frac{A \cdot z}{z-1}\,. \tag{9.42}$$

На основании (9.37), (9.39) и (9.42) можно получить соотношение

$$z \cdot (Q(z) - q_0) - \rho \cdot Q(z) = \frac{A \cdot z}{z-1} \tag{9.43}$$

или

$$(z - \rho) \cdot Q(z) - z \cdot q_0 = \frac{A \cdot z}{z-1}\,. \tag{9.44}$$

Проведем преобразования

$$(z - \rho) \cdot Q(z) = \frac{A \cdot z}{z-1} + z \cdot q_0 = z \cdot \frac{A + z \cdot q_0 - q_0}{z-1} \tag{9.45}$$

и получим

$$Q(z) = z \cdot \frac{A + z \cdot q_0 - q_0}{(z-1) \cdot (z - \rho)} \tag{9.46}$$

или

$$\frac{Q(z)}{z} = \frac{A - q_0 + z \cdot q_0}{(z-1) \cdot (z - \rho)}\,. \tag{9.47}$$

Дробь

$$\frac{A - q_0 + z \cdot q_0}{(z-1)\cdot(z-\rho)},$$

можно разложить на сумму элементарных дробей вида

$$\frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\rho},$$

где значения коэффициентов a и b находятся с помощью стандартных подстановок $z = 1$ и $z = \rho$ в выражение

$$A - q_0 + z \cdot q_0 = a \cdot (z-\rho) + b \cdot (z-1) \tag{9.48}$$

и соответственно равны:

$$a = \frac{A}{1-\rho}; \qquad b = \frac{-A + q_0 - q_0 \cdot \rho}{1-\rho}. \tag{9.49}$$

Откуда имеем

$$\frac{Q(z)}{z} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\rho} = \frac{A}{1-\rho} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{-A + q_0 - q_0 \cdot \rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{z-\rho} \tag{9.50}$$

или

$$Q(z) = \frac{A}{1-\rho} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{-A + q_0 - q_0 \cdot \rho}{1-\rho} \cdot \frac{z}{z-\rho}. \tag{9.51}$$

Используя обратные табличные преобразования

$$\frac{z}{z-1} \Rightarrow 1 \text{ и } \frac{z}{z-\rho} \Rightarrow \rho^t \tag{9.52}$$

и окончательно, учитывая (8.34) и (8.36), получаем

$$q_t = q_0 \cdot \rho^t + \frac{A}{\rho - 1} \cdot (\rho^t - 1), \tag{9.53}$$

где $A = c \cdot (1 - (1 + \alpha \cdot v) \cdot \exp(-\alpha v)) \cdot (u - v)$.

Экономическая интерпретация формулы (9.53) в значительной степени аналогична интерпретации формул (9.32) и (9.33) – объем собственных средств финансовой фирмы на момент времени t по прежнему определяется составляющими, зависящими от величины начального капитала $(q_0 \cdot \rho^t)$ и доходов от эксплуатации привлеченных средств

$$\left(\frac{A}{\rho - 1} \cdot (\rho^t - 1) \right).$$

Контрольные вопросы

(выберите правильный ответ)

1. Поток (*flow)* ?

а) $x_j = \int_0^t \dot{x}_j(\tau) d\tau$;

б) экономическая величина, которая характеризует скорость изменения характеристик состояния банка $x_j^{'}(t) = \frac{dx_j(t)}{dt}$;

в) поток – вектор производных характеристик;

г) величина, характеризующая траекторию системы;

д) величина, характеризующая значение какого-либо показателя на некоторый фиксированный момент времени.

2. Что понимается под случайным процессом?

   а) Под случайным процессом (случайной функцией времени, «стохастический процесс» или «вероятностный процесс») понимается функция $\tilde{x}(t)$, которая может иметь ту или иную конкретную реализацию (траекторию) из некоторого фиксированного множества возможных траекторий $X = \{x(t,\theta) | \theta \in \Theta\}$;

   б) экономическая величина, которая характеризует скорость изменения характеристик состояния банка;

   в) величина, которая может принимать то или иное случайное значение;

   г) система первичных ресурсных потоков;

   д) модель динамики банковских ресурсов.

3. Мультипликативная модель ресурса на дискретном отрезке времени $[0,n]$?

   а) $x_n = x_0 \cdot \alpha^n$;

   б) $x_n = x_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$;

   в) $x_j'(t) = \dfrac{dx_j(t)}{dt}$;

   г) $x_n = x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$;

   д) $x_n = x_0 \cdot \exp(n \ln \alpha)$.

4. Чему равно математическое ожидание случайной величины $\tilde{\alpha}_i$, если плотность распределения задается выражением $f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) = \dfrac{1}{\alpha\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(\ln\alpha - \mu_i)}{2\sigma_i^2}\right]$, $\alpha > 0$?

   а) $m_i = M\tilde{\alpha}_i = \int_0^{+\infty} \exp\left(\mu_i + \dfrac{\sigma_i^2}{2}\right) d\alpha$;

   б) $m_i = \exp(2\mu_i + 2\sigma_i^2) - \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)$;

   в) $m_i = M\tilde{\alpha}_i = \int_0^{+\infty} \alpha f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) d\alpha = \exp\left(\mu_i + \dfrac{\sigma_i^2}{2}\right)$;

   г) $m_i = \mu_i + \dfrac{\sigma_i}{2}$;

   д) $m_i = \exp(\mu_i - \dfrac{\sigma_i}{2})$.

5. Чему равна дисперсия случайной величины $\tilde{\alpha}_i$, если плотность распределения задается выражением $f(\alpha;\tilde{\alpha}_i) = \dfrac{1}{\alpha\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(\ln\alpha - \mu_i)}{2\sigma_i^2}\right]$, $\alpha > 0$?

   а) $s_i^2 = D\tilde{\alpha}_i^2 = M\tilde{\alpha}_i^2 - m_i^2 = \exp(2\mu_i + 2\sigma_i^2) - \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)$;

   б) $s_i^2 = \exp(\mu_i + \dfrac{\sigma_i^2}{2})$;

   в) $s_i^2 = \exp(\mu_i + \dfrac{\sigma_i}{2})$;

   г) $s_i^2 = \exp(\mu_i + 2\sigma_i^2)$;

   д) $s_i^2 = \exp(2\mu_i + \sigma_i^2) - \exp(\mu_i + 2\sigma_i^2)$.

6. Каким соотношением определяется величина собственных средств в рекуррентной модели динамики ресурсов?
   а) $q_{t+1} = q_t - u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) + v \cdot x_t$;
   б) $q_{t+1} = q_t + u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) + v \cdot x_t$;
   в) $q_{t+1} = q_t + u \cdot (\theta \cdot q_t - x_{t+1}) + v \cdot x_t$;
   г) $q_{t+1} = q_t - u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) - v \cdot x_t$;
   д) $q_{t+1} = q_t + u \cdot (\theta \cdot q_t + x_{t+1}) - v \cdot x_t$;
7. Что понимается под z-преобразованием функции дискретного аргумента?

   а) функция $F(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$;

   б) Под z-преобразованием функции дискретного аргумента $f(k) = f_k$, $k = 0,1,\ldots$ понимается функция $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$, определенная на некоторой области комплексного аргумента z;

   в) функция $F(z) = \int_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} dz$;

   г) функция $F(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (f_k + z^{-k})$;

   д) функция $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^k$;

8. Выражение для прогнозирования объема собственных средств на момент t?

   а) $\bar{q}_t = q_0 \cdot \rho^t + x_0 \cdot \dfrac{u \cdot \bar{A} - v}{\bar{A} - \rho} \cdot (A^t - \rho^t)$;

   б) $h_t = q_0 \cdot (\rho^t - 1) + \sum_{i=0}^{t-1} \tilde{A}_i \cdot \rho^{t-i-1}$;

   в) $\tilde{A}_t = x_0 \cdot (u \cdot \tilde{\alpha}_t - v) \cdot \prod_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i$;

   г) $x = \varphi(v) = c \cdot (1 - (1 + \alpha \cdot v) \cdot \exp(-\alpha v))$;

   д) $q_t = q_0 \cdot \rho^t + \dfrac{A}{\rho - 1} \cdot (\rho^t - 1)$.

9. Оригинал для $\dfrac{z}{z - \rho}$?

   а) $\dfrac{a}{z-1} + \dfrac{b}{z-\rho}$;

   б) оригиналом служит последовательность ρ^{-t};

   в) оригиналом служит последовательность ρ^t;

   г) оригиналом служит последовательность $q_i \cdot \rho^t$;

   д) $\eta_t = \begin{bmatrix} 0, \ t < 0, \\ 1, \ t \geq 0 \end{pmatrix}$.

10. От чего зависит объем собственных средств финансовой фирмы в рамках многоэтапной динамики на базе мультипликативной стохастической модели?

а) от точности модели;
б) величины начального капитала;
в) результатов деятельности по привлечению средств и получению доходов от их активного использования;
г) 1) величины начального капитала; 2) результатов деятельности по привлечению средств и получению доходов от их активного использования;
д) ни от чего не зависит.

ТЕМА 10. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ БАНКОВСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ

Наряду с рассмотренными выше моделями, заслуживает внимание и динамические модели банка с непрерывным временем. Эти модели основываются на использование теории оптимального управления. При этом, максимизируемый функционал может представлять собой суммарную полезность распределяемой прибыли (дивидендных выплат) за анализируемый период или сочетать в себе как интегральный так и терминальный показатели. Решение задачи оптимального управления применительно к банковской сфере используется при стратегическом планировании.

10.1. Моделирование банковской деятельности на основе аппарата теории оптимального управления

В теории оптимального управления рассматриваются управляемые системы (объекты). Состояние системы в каждый момент времени задается n числами $x_1,x_2,\dots,x_n$, которые называются фазовыми координатами. Движение системы заключается с математической точки зрения в том, что ее состояние с течением времени изменяется, т.е. фазовые координаты являются функциями времени $x_i=x_i(t)$, $i = 1,2\dots,n$. Таким образом, в пространстве фазовых координат $x_1,x_2,\dots,x_n$ состояние системы характеризуется вектор-функцией $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$.

Движением системы можно управлять с помощью значений в каждый момент времени некоторой вектор-функции $u(t)=(u_1(t),\dots,u_m(t))$, $j=1,2,\dots,m$, которая называется управлением. Меняя управление $u(t)$ можно получить различные траектории движения системы в пространстве координат $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Движение системы на отрезке времени $[t_0 ,T]$ вдоль некоторой траектории оценивается с помощью показателя качества или функционала. Управление $u(t)$ называется оптимальным, если на соответствующей ему траектории функционал достигает экстремального (максимального или минимального) значения.

Перейдем к математической формулировке задачи оптимального управления. Запишем дифференциальные уравнения, определяющие состояние исследуемой системы в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2,\dots, x_n, u_1, u_2,\dots, u_m, t); \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2,\dots, x_n, u_1, u_2,\dots, u_m, t); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2,\dots, x_n, u_1, u_2,\dots, u_m, t). \end{cases} \tag{10.1}$$

Состояние системы в начальный момент времени $t = t_0$ определяется заданием значений фазовых координат

$$x_1(t) = x_{10} ,\ x_2(t) = x_{20} ,\ \dots,\ x_n(t) = x_{n0} , \tag{10.2}$$

а в конечный момент $t = T$ заданием некоторых уравнений относительно $x_i(T)$ и T:

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1(T), x_2(T), ..., x_n(T), T) = 0, \\ \Phi_2(x_1(T), x_2(T), ..., x_n(T), T) = 0, \\ .... \\ \Phi_\partial(x_1(T), x_2(T), ..., x_n(T), T) = 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

Условия (10.2), (10.3) называются граничными (или краевыми). Показатель качества задается, как правило, в виде функционала *J(x,u),* зависящего от вектор-функций *x(t), u(t).* Напомним, что функционал - это закон, в силу которого каждой паре функций *x(t), u(t)* ставится в соответствие действительное число. Во многих задачах оптимального управления функционал представляется в виде определенного интеграла

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{T} F(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m)dt\,, \tag{10.4}$$

где $F(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m)$ - заданная функция. К функциям $x_i(t)$, $u_j(t)$ $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m)$, рассматриваемым в (1) и (4), предъявляются следующие требования:

- функции $x_i(t)$ кусочно-дифференцируемы на отрезке $[t_0,T]$;
- функции $u_j(t)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[t_0,T]$;
- на области изменения функций $x_i(t)$, $u_j(t)$ накладываются ограничения, записываемые в виде некоторой системы равенств и неравенств:

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) = 0; \\ h_2(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) = 0; \\ .... \\ h_p(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) = 0; \\ g_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \le 0; \\ .... \\ g_q(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) \le 0. \end{cases} \tag{10.5}$$

Сформулируем теперь задачу оптимального управления:

найти управление $\tilde{u}_j(t), \quad j = 1,2,...,m,$

и переменные $\tilde{x}_i(t), \quad i = 1,2,...,n$,

доставляющие минимум (или максимум) функционалу *J(x,u)* и удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (10.1), краевым условиям (10.2) и (10.3), а также ограничениям (10.5).

Условия и формулировка задачи и оптимального управления будут иметь более компактный вид, если ввести следующие вектор-функции:

$$f(x,u,t) = (f_1(x,u,t), f_2(x,u,t), ..., f_n(x,u,t));$$

$$\Phi(x(T),T) = (\Phi_1(x(T),T), \Phi_2(x(T),T), ..., \Phi_l(x(T),T));$$

$$h(x,u) = (h_1(x,u), h_2(x,u), ..., h_p(x,u));$$

$$g(x,u) = (g_1(x,u), g_2(x,u), ..., g_q(x,u)).$$

Тогда формулировка задачи оптимального управления запишется следующим образом: найти вектор-функции $\tilde{u}(t), \ \tilde{x}(t)$ доставляющие минимум (или максимум) функционалу

$$J = J(x,u) \tag{10.6}$$

при дифференциальных связях

$$\dot{x} = f(x,u,t), \tag{10.7}$$

краевых условиях

$$x(t_0) = x_0; \qquad (10.8)$$

$$\Phi(x(T),T) = 0 \qquad (10.9)$$

и ограничениях

$$h(x,u) = 0; \qquad (10.10)$$

$$g(x,u) \le 0. \qquad (10.11)$$

Вектор-функцию $\tilde{u}(t)$, которая удовлетворяет всем условиям сформулированной задачи, называют оптимальной программой или оптимальным управлением. Соответствующую траекторию движения (процесс), определяемую из системы

$x = f(x,\tilde{u},t)$,

называют оптимальной траекторией, а функционал (6) целевой функцией.

Классификация задач оптимального управления

Конкретизация выражений (10.6) и (10.11) порождает различные типы задач оптимального управления. Типы задач определяются способами задания функционала (10.6), ограничений (10.10), (10.11) и краевых условий (10.8).

I. Способы задания функционала

1. Интегральный функционал. Задача Лагранжа.

Интегральным называется функционал вида

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{T} F(x,u,t)dt, \qquad (10.16)$$

где F – скалярная дифференцируемая функция векторных аргументов x,u и скалярного аргумента t, т.е.

$F(x,u,t) = F(x_1, x_2,..., x_n, u_1, u_2,..., u_m, t)$.

В случае отсутствия ограничений (10) и (11) задача о минимуме функционала (16) при условиях (7), (8), (9) традиционно называется задачей Лагранжа. Она является классической задачей вариационного исчисления.

2. Задача Майера. В этой задаче минимизируемый функционал имеет вид:

$$J(x,u) = \psi(x(T),T), \qquad (10.17)$$

т.е. представляет собой некоторую функцию конечного состояния.

3. Задача Больца. Определить вектор-функции $x(t)$, $u(t)$, доставляющие минимум функционалу

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{T} F(x,u,t)dt + \psi(x(t_0),t_0,x(T),T) \qquad (10.18)$$

при ограничениях (10.11) – (10.15). В этой задаче имеем функционал смешанного типа.

II. Способы задания ограничений вдоль траектории.

1. Ограничение на управление. Если ограничение на управление отсутствует, мы получаем классическую задачу, которая решается методами вариационного исчисления. Однако в практических задачах, как правило, управления являются ограниченными. Например, часто встречается ограничения типа

$|u(t)| \le \alpha(t)$.

В таких случаях классические методы решения оказываются непригодными. Для решения подобных задач в конце 50-х годов Л.С.Понтрягиным и его учениками был разработан принцип максимума, который будет рассмотрен ниже.

2. Ограничения на фазовые переменные. Применимость того или иного метода решения задач с ограничениями на фазовые координаты существенно зависит от вида этих ограничений. Обычно здесь различают ограничения в виде равенств или неравенств.
3. Совместные ограничения на управления и фазовые переменные не могут быть разделены. Подобные задачи часто встречаются в экономике.
4. Изопериметрическая задача (задача с интегральными ограничениями): определить минимум функционала при ограничениях

$$\int_{t_0}^{T}\Omega_j(x(t),u(t),t)dt = L_j, \quad j = 1,2,...,k \tag{10.19}$$

где Ω_j - некоторые заданные скалярные функции, а L_j - известные числа.

Название этому классу задач дала следующая «историческая» задача, изучавшаяся еще в конце XVII века: определить кривую данной длины, которая ограничивает максимальную площадь.

Изопериметрические задачи встречаются в экономике в случаях. Когда задан суммарный объем некоторого ресурса, которым мы вправе распоряжаться.

III. Способы задания краевых условий.

1. Задача с фиксированными концами.

В этих задачах заданы векторы начального и конечного состояний, т.е. $x(t_0)$ и $x(T)$. Различают также задачи с фиксированным временем (t_0 ,T - заданы) и нефиксированным (либо t_0 , либо T – не задано).

2. Задача со свободным концом. Если $x(t_0)$ или $x(T)$ не задано, то мы имеем задачу со свободным левым (правым) концом.
3. Задача с подвижными концами. Если t_0 , T – фиксированы, $x(t_0)$ задан, а вектор $x(t)$ лежит на гиперповерхности, определяемой уравнением (13), то говорят о задаче с фиксированным временем и свободным правым концом. Аналогично можно сформулировать задачу со свободным левым концом.

Приведенная классификация не является всеобъемлющей, но она вполне достаточна для тех задач, которые возникают при моделировании банковской деятельности.

Рассмотренные выше задачи описывают поведение систем с «непрерывным временем», т.е систем, состояние которых описывается дифференциальными уравнениями. Однако для моделирования банковской деятельности, не менее важное значение имеют системы с «дискретным временем». Состояние таких систем, описывается системой дискретных (разностных) уравнений. Методы решения таких задач важны и с точки зрения численного решения непрерывных задач оптимизации. Некоторые из этих методов будут рассмотрены ниже.

10.2. Необходимое условие экстремума в классической задаче Лагранжа

Классическая задача Лагранжа является задачей оптимального управления без ограничений на фазовой вектор управления.

Постановка задачи:

определить непрерывную вектор-функцию

$u(t) = (u_1(t),u_2(t),...,u_m(t))$

и дифференцируемую вектор-функцию

$x(t) = (x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)),$

доставляющие минимум функционалу

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{T}F(x,u,t)dt \tag{10.20}$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x,u,t), \qquad (10.21)$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad (10.22)$$

$$\Phi(x(T),T) = 0. \qquad (10.23)$$

Здесь $F=F(x,u,t)$ – скалярная дифференцируемая функция своих аргументов, а $f=f(x,u,t)$ – непрерывно-дифференцируемая вектор-функция.

Таким образом, ставится задача об отыскании минимума функционала (10.20) при условии, что искомые функции $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе уравнений (10.21). Такая постановка задачи аналогична постановке задаче нелинейного программирования с ограничениями-равенствами, решение которой определялось путем введения вспомогательной функции Лагранжа. Из дальнейших рассмотрений будет видно, что эта аналогия имеет глубокие корни.

Решение поставленной задачи рассмотрим сначала для случая, когда при $t = T$ ограничения (10.23) отсутствуют (задача со свободным концом).

Предположим, что оптимальное решение задачи Лагранжа существует. Обозначим через $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$ вектор-функции, доставляющие минимум функционалу (10.20) и удовлетворяющие системе уравнений (10.21).

Введем вектор вспомогательных функций

$\psi(t) = (\psi_1(t),...,\psi_n(t))$,

которые определяются как решение следующей системы дифференциальных уравнений, называемой сопряженной по отношению к системе (10.21):

$$\dot{\psi} = -f_x^T \cdot \psi + F_x, \qquad (10.24)$$

где

$$F_x = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right),$$

$$f_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

f_x^T - транспонированная матрица.

Начальные условия для системы (10.24) берутся при $t = T$ в следующем виде:

$$\psi(T) = 0, \qquad (10.25)$$

т.е.

$\psi_1(T) = \psi_2(T) = ... = \psi_n(T) = 0.$

Функции $\psi_j(t)$ $(j = 1,2,...,n)$ называются сопряженными переменными.

Определим далее функцию Гамильтона

$$H = -F + (\psi, f) = -F + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i \qquad (10.26)$$

и сформулируем следующую теорему.

<u>Теорема</u> (необходимое условие экстремума).

Если функции $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ доставляют минимум функционалу (10.20) при условиях (10.21) и (10.22), то существует такая непрерывная вектор-функция $\psi(t)$, удовлетворяющая системе уравнений (10.24) и условиям (10.25), что управление в каждый момент времени t является стационарной точкой функции Гамильтона, т.е. выполняются условия

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -F_u + f_u^T \cdot \psi = 0. \tag{10.27}$$

Заметим, что условие (10.27) представляет собой векторное равенство, в котором

$$\frac{\partial H}{\partial u} = (\frac{\partial H}{\partial u_1}, \frac{\partial H}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial H}{\partial u_m}), \quad F_u = (\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial u_m}),$$

$$f_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

На основании приведенной теорем можно сделать вывод о том, что оптимальные управления $\tilde{u}_1(t),\ \tilde{u}_2(t), ..., \tilde{u}_m(t)$ следует искать среди тех функций, которые удовлетворяют системе (10.27).

Следует отметить, что система (10.24), определяющая функцию $\Psi(t)$, содержит неизвестные пока функции *x(t)* и *u(t).* Фактически все функции *x(t), u(t)* и $\Psi(t)$ взаимосвязаны и определяются как решения следующей системы уравнений, полученной на основании (10.21), (10.24) и (10.27):

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t); \tag{10.28}$$

$$\dot{\psi} = -f_x^T(x(t), u(t), t) \cdot \psi + F_x; \tag{10.29}$$

$$-F_u + f_n^T \cdot \psi = 0. \tag{10.30}$$

Уравнения (30) полученной системы перепишем в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial u_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \cdot \psi_i = 0; \\ -\frac{\partial F}{\partial u_2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \cdot \psi_i = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\frac{\partial F}{\partial u_m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \cdot \psi_i = 0. \end{aligned}\right. \tag{10.31}$$

Функции $F(x,u,t),\ f_i(x,u,t)\ \ (i = 1,2,...,n)$ заданы в условиях задачи, следовательно, в системе (10.31) производные $\frac{\partial F}{\partial u_j},\ \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ - известные функции. Таким образом, система (10.31) определяет зависимость u от $x,\ \psi$ и t , т.е. $u = u(x,\psi,t)$. Учитывая это, записываем уравнение (10.28), (10.29) в виде:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u(x,\psi,t), t); \\ &\dot{\psi} = -f_x^T(x, u(x,\psi,t), t) + F_x(x, u(x,\psi,t), t) \end{aligned} \tag{10.32}$$

и получаем систему дифференциальных уравнений относительно *2n* функций $x_1, x_2, ..., x_n, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$. Для отыскания искомых решений имеем *2n* условий:

при $t = t_0$ заданные значения $x(t_0)$;

$$\text{при } t = T \qquad \psi(T) = 0. \tag{10.33}$$

Если система (10.32) решается точными методами, эти $2n$ условий используются для определения получающихся при интегрировании $2n$ произвольных постоянных величин.

Однако для большинства практических задач система (10.32) точно не решается. В связи с этим возникает проблема разработки специальных алгоритмов численного решения, учитывающих особенности системы (10.32) и условий (10.33).

Замечание 1. Продолжим далее параллель между рассматриваемой задачей и задачей математического программирования с ограничениями-равенствами. Легко видеть, что функция Гамильтона и сопряженные переменные играют ту же роль, что и функция Лагранжа $F(X,\Lambda)$ и множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ в соответствующей задаче нелинейного программирования.

Замечание 2. Мы рассмотрели необходимые условия минимума для задачи со свободным концом. Для других видов задач (с закрепленными концами, с подвижным правом концом и т.д.) необходимые условия формулируются аналогично, лишь меняются вид системы (10.24) и условий (10.25), а также функции Гамильтона (10.26).

Принцип максимума Л.С. Понтрягина – необходимое условие оптимальности. с. 175.

В классической задаче Лагранжа нет ограничений на управление. Однако в большинстве практических задач множество допустимых управлений имеет сложную структуру. Для таких задач необходимые условия в том виде, как они установлены для классической задачи вариационного исчисления, естественно, непригодны. Их дальнейшим и существенным расширением является принцип максимума, установленный Л.С. Понтрягиным.

Рассмотрим формулировку принципа максимума для следующей задачи оптимального управления:

Определить вектор-функции $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{x}(t)$, доставляющие минимум функционалу

$$J(x,u) = \int_{t_o}^{T} F(x,u,t)dt \tag{10.34}$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{10.35}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{10.36}$$

$$u \in G_u \tag{10.37}$$

где G_u - замкнутое множество.

Другими словами, рассмотрим задачу оптимального управления со свободным правом концом и ограничениями на множество допустимых управлений. При этом управление $u(t)$ будем разыскивать в классе кусочно-непрерывных функций, а вектор-функции $x(t)$ - в классе кусочно-дифференцируемых функций. Относительно функций F и f будем предполагать, что они непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$.

Как и в классической задаче Лагранжа, введем сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -f_x^T \cdot \psi + F_x \tag{10.38}$$

с начальными условиями

$$\psi(T) = 0. \tag{10.39}$$

Функцию Гамильтона определим следующим образом:

$$H = -F + (\psi, f) = -F + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i. \tag{10.40}$$

Сформулируем теорему, которая выражает принцип максимума для данной задачи.

Теорема 1 (принцип максимума). Если управление $\tilde{u}(t)$ и траектория $\tilde{x}(t)$ доставляет минимум функционалу (10.34) при уравнениях связи (10.35), ограничениях на управление (10.37) и краевых условиях (10.36), то существует такая непрерывная вектор-функция ψ, удовлетворяющая сопряженной системе (10.38) и условию (10.39), что при каждом $t \in [t_0, T]$ функция Гамильтона (10.40) достигает в точке $\tilde{u}(t)$ максимума по всем $u \in G_u$, т.е.

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) = \max_{u \in G_u} H(x(t), u(t), t). \tag{10.41}$$

Из приведенной теоремы следует вывод о том, что оптимальное управление следует искать среди тех, которые удовлетворяют условию (10.41). Определив из (10.41), если это окажется возможным, зависимость $\tilde{u}(t) = u(x, \psi, t)$, подставляем ее в системы (10.35) и (10.38). В результате приходим к краевой задаче для системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(x, \psi, t); \\ \dot{\psi} &= -f_x^T(x, u(x, \psi, t) \cdot \psi + F_x(x, u(x, \psi, t), t) \end{aligned} \tag{10.42}$$

при условиях (10.36), (10.37)

$x(t_0) = x_0$;

$\psi(T) = 0.$

Таким образом, схема решения задачи оптимального управления на основе принципа максимума аналогична схеме решения задачи Лагранжа. Различаются они способом определения оптимального управления $\tilde{u}(t)$ при максимизации функции Гамильтона.

Замечание 1. Если оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ лежит внутри области допустимых управлений G_u, то ограничения задачи (10.37) являются несущественными, и тогда необходимое условие экстремума можно записать в виде (10.27):

$$\frac{\partial H}{\partial u}\Big| u = \tilde{u}(t) \;\; = 0 \tag{10.43}$$

Замечание 2 . Мы рассмотрели формулировку принципа максимума для задачи со свободным правым концом. Для других задач оптимального управления формулировка имеет аналогичный вид, меняются лишь условия (10.38) и (10.39).

Краевая задача принципа максимума

Отметим, что начальные условия для функций $x(t_0) = x_0$ и конечные условия для функций $\psi(T) = 0$ заданы, в то время как конечные и начальные условия для функций $x(T)$ и $\psi(t_0)$, соответственно, неизвестны. Их необходимо определить в процессе решения краевой задачи. Задав произвольные начальные условия $\psi(t_0) = a$ и решив каким-либо численным методом задачу Коши для системы (10.42) можно найти значения $\psi(T) = b$. Очевидно, получаемые значения будут являться некоторой функцией вектора a, т.е. $\varphi(a) = 0$. Следовательно, нужно найти такие значения a, чтобы они являлись решениями нелинейной системы уравнений $\varphi(a) = 0$. Решение приведенной системы можно искать на основе метода Ньютона или различных его модификаций.

В методе Ньютона используются следующие реккурентные соотношения

$$a^{k+1} = a^k - \left(\frac{\partial \varphi(a\;)}{\partial a}\Big| a = a^k\right)^{-1} \cdot \varphi(a^k)\,.$$

Для реализации метода Ньютона необходимо знание матрицы производных $\dfrac{\partial \varphi(a)}{\partial a}$, которые находятся численным дифференцированием с использованием метода «стрельбы».

Контрольные вопросы

(выберите правильный ответ)

1. Функционал?

   а) Функционал – это интегральное выражение.

   б) Функционал – это функция, ставящая в соответствие некоторому значению аргумента x значение функции.

   в) Функционал - это закон, в силу которого каждой паре функций $x(t)$, $u(t)$ ставится в соответствие действительное число.

   г) Функционал – это функция комплексного аргумента.

   д) Функционал – это дискретная функция своих аргументов.

2. Формулировка задачи оптимального управления?

   а) найти вектор-функции $\tilde{u}(t),\ \tilde{x}(t)$, доставляющие минимум (или максимум) функционалу $J = J(x,u)$.

   б) найти вектор-функции $\tilde{u}(t),\ \tilde{x}(t)$, доставляющие минимум (или максимум) функционалу $J = J(x,u)$ при дифференциальных связях $\dot{x} = f(x,u,t)$.

   в) найти вектор-функции $\tilde{u}(t),\ \tilde{x}(t)$, доставляющие минимум (или максимум) функционалу $J = J(x,u)$ при дифференциальных связях $\dot{u} = f(x,u,t)$.

   г) найти оптимальное управление в задаче Лагранжа.

   д) найти оптимальное управление $\tilde{u}(t),\ \tilde{x}(t)$, доставляющее минимум (максимум) функционалу.

3. Интегральный функционал. Задача Лагранжа?

   а) $H = -F + (\psi, f) = -F + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i$.

   б) $J(x,u) = \psi(x(T),T)$;

   в) $J(x,u) = \int_{t_0}^{T} F(x,u,t)dt + \psi(x(t_0),t_0,x(T),T)$;

   г) Интегральным называется функционал вида $J(x,u) = \int_{t_0}^{T} F(x,u,t)dt$ **;**

   д) $\int_{t_0}^{T} \Omega_j(x(t),u(t),t)dt = L_j, \quad j = 1,2,...,k$.

4. Задача Майера?

   а) В этой задаче минимизируемый функционал имеет вид:

$J(x,u) = \psi(x(T),T),$

   т.е. представляет собой некоторую функцию конечного состояния.

   б) $J(x,u) = \int_{t_0}^{T} F(x,u,t)dt$;

   в) $J(x,u) = \int_{t_0}^{T} F(x,u,t)dt + \psi(x(t_0),t_0,x(T),T)$;

   г) $H = -F + (\psi, f) = -F + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i$.

   д) $\int_{t_0}^{T} \Omega_j(x(t),u(t),t)dt = L_j, \quad j = 1,2,...,k$.

5. Найти оптимальное управление из условия минимума функционала

$$J = \int_0^{1,5} (u - 2x_2)dt$$

при ограничениях

$\dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = x_1 + u_1,\ \ \ x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 1,$

$0 \le u + x_2 \le 1.$

а) при h = 1,5: $\tilde{u}^0 = -1,\ \ \tilde{u}^1 = \tilde{u}^2 = -0{,}5.$

б) при h = 0,5: $\tilde{u}^0 = -1,\ \ \tilde{u}^1 = \tilde{u}^2 = -0{,}5.$

в) при h = 2,5: $\tilde{u}^0 = -1,\ \ \tilde{u}^1 = \tilde{u}^2 = -0{,}5.$

г) при h = 0,5: $\tilde{u}^0 = -0{,}5,\ \ \tilde{u}^1 = \tilde{u}^2 = -1{,}5.$

д) при h = 0,5: $\tilde{u}^0 = -1,\ \ \tilde{u}^1 = \tilde{u}^2 = -0{,}5.$

6. Найти оптимальное управление из условия минимума функционала

$$J = \int_0^{1,5} x_2^2(t)dt$$

при ограничениях

$\dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = u_1,\ \ \ x_1(0) = 0{,}5,\ \ x_2(0) = 1,\ \ |u| \le 1.$

а) при h=0,5: $\tilde{u}^0 = \tilde{u}^1 = -1{,}5,\ \ \tilde{u}^2 = 0.$

б) при h=1,5: $\tilde{u}^0 = \tilde{u}^1 = -1,\ \ \tilde{u}^2 = 0.$

в) при h=2,5: $\tilde{u}^0 = \tilde{u}^1 = -1,\ \ \tilde{u}^2 = 0.$

г) при h=0,5: $\tilde{u}^0 = \tilde{u}^1 = -1,\ \ \tilde{u}^2 = 1.$

д) при h=0,5: $\tilde{u}^0 = \tilde{u}^1 = -1,\ \ \tilde{u}^2 = 0.$

7. Основное соотношение принципа максимума в задаче оптимального управления?

а) $J(x,u) = \psi(x(T),T)$.

б) $H = -F + (\psi, f) = -F + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i.$

в) $J(x,u) = \int_{t_0}^{T} F(x,u,t)dt + \psi(x(t_0),t_0,x(T),T)$.

г) $H(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t),t) = \max_{u \in G_u} H(x(t),u(t),t).$

д) $a^{k+1} = a^k - (\frac{\partial \varphi(a\ )}{\partial a}\Big| a = a^k)^{-1} \cdot \varphi(a^k)$

8. Какие рекуррентные соотношения используются в методе Ньютона при решении краевой задаче принципа максимума?

а) $H = -F + (\psi, f) = -F + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i.$

б) $a^{k+1} = a^k + (\frac{\partial \varphi(a\ )}{\partial a}\Big| a = a^k)^{-1} \cdot \varphi(a^k)$.

в) $a^{k+1} = a^k + (\frac{\partial^2 \varphi\ (a\ )}{\partial a^2}\Big| a = a^k)^{-1} \cdot \varphi(a^k)$.

г) $H(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t),t)=\max\limits_{u\in G_u}H(x(t),u(t),t)$.

д) $a^{k+1}=a^k-(\dfrac{\partial\varphi(a\ )}{\partial a}\Big|a=a^k)^{-1}\cdot\varphi(a^k)$.

9. Рекуррентное соотношение Беллмана?

а) $a^{k+1}=a^k+(\dfrac{\partial\varphi(a\ )}{\partial a}\Big|a=a^k)^{-1}\cdot\varphi(a^k)$;

б) $S_0(x^0)=\min\limits_{u_0\in G}[F(x^0,u_0,t_0)+S_1(x^0+hf(x^0,u_0,t_0))]$.

в) $a^{k+1}=a^k+(\dfrac{\partial^2\varphi\ (a\ )}{\partial a^2}\Big|a=a^k)^{-1}\cdot\varphi(a^k)$.

г) $H(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t),t)=\max\limits_{u\in G_u}H(x(t),u(t),t)$.

д) $H=-F+(\psi,f)=-F+\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_i f_i$.

10. Определить оптимальную вектор-функцию $\tilde{u}=(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$ из условия минимума функционала $J=\int\limits_0^2(u_1+2u_2-x_1-x_2)dt$ с учетом уравнений $\dot{x}_1=x_2+u_1,\ \dot{x}_2=u_2$, условий на левом конце $x_1(0)=0,\ x_2(0)=1$ и ограничений на управление $|u_1|\le 1,\ 0\le u_2\le 0{,}5$? Рекомендации: задаваясь $N=4$ и шагом $h=0{,}5$, записать систему разностных уравнений.

а) $\tilde{u}_1^0=1,\ \tilde{u}_2^0=0{,}5,\ \ s_0=-7{,}125$; $\quad\tilde{u}_1^1=0,\ \tilde{u}_2^1=0,\ \ s_1=-2+h-3x_1^1-3x_2^1(1+h)$;

$\tilde{u}_1^2=-1,\ \tilde{u}_2^2=1,\ \ s_1=-2+h-2x_1^2+x_2^2(2+h)$;

$\tilde{u}_1^3=-1,\ \tilde{u}_2^3=0,\ \ s_3=-1-(x_1^2+h(x_2^2+u_1^2))-(x_2^2+hu_2^2)$.

б) $\tilde{u}_1^0=1,\ \tilde{u}_2^0=0{,}5,\ \ s_0=-7{,}125$; $\quad\tilde{u}_1^1=0,\ \tilde{u}_2^1=0,\ \ s_1=-2+h-3x_1^1-3x_2^1(1+h)$;

$\tilde{u}_1^2=-1,\ \tilde{u}_2^2=0,\ \ s_1=-2+h-2x_1^2-x_2^2(2+h)$;

$\tilde{u}_1^3=-1,\ \tilde{u}_2^3=0,\ \ s_3=-1-(x_1^2+h(x_2^2+u_1^2))-(x_2^2+hu_2^2)$.

в) $\tilde{u}_1^0=0,\ \tilde{u}_2^0=0{,}5,\ \ s_0=-5{,}125$; $\quad\tilde{u}_1^1=0,\ \tilde{u}_2^1=0,\ \ s_1=-2+h-3x_1^1-3x_2^1(1+h)$;

$\tilde{u}_1^2=-1,\ \tilde{u}_2^2=0,\ \ s_1=-2+h-2x_1^2-x_2^2(2+h)$;

$\tilde{u}_1^3=-1,\ \tilde{u}_2^3=0,\ \ s_3=-1-(x_1^2+h(x_2^2+u_1^2))-(x_2^2+hu_2^2)$.

г) $\tilde{u}_1^0=1,\ \tilde{u}_2^0=0{,}5,\ \ s_0=-7{,}125$; $\quad\tilde{u}_1^1=1,\ \tilde{u}_2^1=-0{,}5,\ \ s_1=-2+h-3x_1^1-3x_2^1(1+h)$;

$\tilde{u}_1^2=-1,\ \tilde{u}_2^2=0,\ \ s_1=-2+h-2x_1^2-x_2^2(2+h)$;

$\tilde{u}_1^3=-1,\ \tilde{u}_2^3=0,\ \ s_3=-1-(x_1^2+h(x_2^2+u_1^2))-(x_2^2+hu_2^2)$.

д) $\tilde{u}_1^0=1,\ \tilde{u}_2^0=0{,}5,\ \ s_0=-7{,}125$; $\quad\tilde{u}_1^1=0,\ \tilde{u}_2^1=0,\ \ s_1=-2+h-3x_1^1-3x_2^1(1+h)$;

$\tilde{u}_1^2=-0{,}5,\ \tilde{u}_2^2=-1,\ \ s_1=-2+h-2x_1^2-x_2^2(2+h)$;

$\tilde{u}_1^3=-1,\ \tilde{u}_2^3=0,\ \ s_3=-1-(x_1^2+h(x_2^2+u_1^2))-(x_2^2+hu_2^2)$.

Таблица правильных ответов
на контрольные вопросы

Вопросы	ы									
	1 т.	**2 т.**	**3 т.**	**4 т.**	**5 т.**	**6 т.**	**7 т.**	**8 т.**	**9 т.**	**10 т.**
1	б	г	в	а	д	в	а	б	б	в
2	г	д	в	б	в	б	г	д	а	б
3	а	б	а	г	б	г	а	в	г	г

4	г	а	б	а	д	а	б	б	в	а
5	б	г	г	б	а	д	г	д	а	б
6	а	д	б	в	б	д	д	а	д	д
7	в	г	д	в	д	г	а	а	б	г
8	г	а	а	б	а	в	а	в	а	д
9	г	б	в	а	б	а	д	б	в	б
10	б	а	б	б	а	г	б	а	г	б