

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова  
Ивановский филиал  
Кафедра гуманитарных и правовых дисциплин

Утверждено  
на заседании совета Ивановского филиала  
протокол № 1 от 30.08.2014  
Председатель совета   
Артыева Н.Т.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Направление подготовки Профиль подготовки – Прикладная информатика в экономике  
**09.03.03**  
Прикладная информатика

*Уровень высшего образования **Бакалавриат***

*Программа подготовки **Академический бакалавриат***

Иваново

**Автор-составитель: Туртин Д.В.**

**должность доцент, к.ф.-м.н.**

Рабочая программа

**Математический анализ**

(название дисциплины)

Рабочая программа учебной дисциплины «Математический анализ» составлена в соответствии с требованиями Федерального Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования

Дисциплина относится к базовой части дисциплин и является обязательной для изучения.

**09.03.03**

(шифр)

**«ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»**

(наименование направления)

Утверждена на заседании Учебно-методического совета филиала «30» августа 2014 г., протокол № 1.

Согласования со смежной кафедрой:

Зав. кафедрой  
К.э.н., доцент

Е.С. Васильчук

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели и задачи дисциплины.....	4
2. Место учебной дисциплины в структуре ООП .....	4
3. Требования к результатам освоения дисциплины.....	5
4. Объем дисциплины и виды учебной работы .....	5
5. Содержание дисциплины.....	6
5.1. Структура и содержание учебной дисциплины (модуля) .....	6
5.2. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами.....	8
5.3. Разделы дисциплин и виды занятий .....	8
6. Перечень практических занятий .....	8
7. Примерная тематика курсовых проектов (работ) .....	9
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины .....	9
8.1. Основная литература.....	9
8.2. Дополнительная литература .....	9
8.3. Методическое обеспечение .....	9
8.4. Информационное обеспечение дисциплины.....	9
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины .....	10
10. Образовательные технологии.....	10
11. Оценочные средства. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины .....	11
11.1. Темы практических занятий .....	12
11.2. Задания для самостоятельной работы студентов.....	13
11.3. Тематика контрольных работ и методические указания по их выполнению .....	14
11.4. Вопросы для подготовки к экзамену/зачету.....	24
Приложение .....	26

## 1. Цели и задачи дисциплины

Преподавание учебной дисциплины Математический анализ преследует следующие основные цели:

- научить студентов базовым математическим методам, используемым для количественного анализа и моделирования реальных экономических процессов в условиях профессиональной деятельности,
- сформировать у студентов определенную математическую культуру, необходимую для изучения других дисциплин учебного плана, в том числе профессионального цикла,
- развить у студентов умение мыслить логически.

В ходе изучения курса “Математический анализ” решаются следующие задачи:

1. Формирование научного мировоззрения студентов, основанного на знании основных законов логики, умении логически мыслить, формализовать и анализировать возникающие проблемы.

2. Овладение основным аппаратом и методами математического анализа и дифференциального исчисления и изучение студентами основных понятий аналитической геометрии, линейной алгебры (включая линейное программирование), теории вероятностей (с элементами теории случайных процессов) и математической статистики.

3. Подготовка студентов к последующей образовательной и профессиональной деятельности, обучение студентов количественному анализу экономических процессов с помощью математических инструментов, умению строить математические модели экономических операций, находить оптимальные решения полученных задач и производить на практике расчеты соответствующих математических величин. Анализ современных тенденции развития науки, прогноз ее развития в ближайшей перспективе позволяет сделать вывод, что знание математики становится необходимым для успешной научной деятельности в области экономики и коммерции и о возрастании роли математической подготовки студентов.

## 2. Место учебной дисциплины в структуре ООП

Дисциплина “Математический анализ” относится к базовой части и преподается в 1 и 2 семестрах.

Дисциплина “Математический анализ” базируется на знаниях, полученных студентами в процессе освоения школьной программы по следующим предметам: Математика, Физика, Информатика и информационно-коммуникационные технологии.

Из дисциплин профессионального цикла Информатика имеет логическую и содержательно-методологическую взаимосвязи с дисциплинами: Экономика организации, Статистика, Бухгалтерский учет, Маркетинг, Коммерческая деятельность, Логистика, Менеджмент, Рекламная деятельность, Организация, технология и проектирование предприятий и Информационные технологии в профессиональной деятельности.

Дисциплина Математический анализ имеет логическую и содержательно-методическую взаимосвязь как с дисциплинами математического и естественнонаучного цикла (Б.2): Информатика, Финансовая математика, Математические методы и модели в коммерческой деятельности/Моделирование в маркетинговых исследованиях, так и с дисциплинами базовой части профессионального цикла (Б.3): Статистика, Бухгалтерский учет, Коммерческая деятельность, Менеджмент, Рекламная деятельность, Экономика организации, Организация, технология и проектирование предприятий, Информационные технологии в профессиональной деятельности.

Освоение дисциплины Математика необходимо, как предшествующее для дисциплин базовой части профессионального цикла (Б.3): Экономика организации,

Статистика, Бухгалтерский учет, Коммерческая деятельность, Организация, технология и проектирование предприятий и Информационные технологии в профессиональной деятельности.

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины

Освоение этих навыков направлено на формирование следующих компетенций:

- способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7).
- способностью собирать и анализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1).

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Иметь целостное представление о:**

- роли и месте математики и математических методов в экономике постиндустриального общества;
- возможностях математического моделирования в оптимизации и совершенствовании функционирования объектов коммерческой деятельности.
- алгоритмах решения оптимизационных задач и возможностях их программной реализации на ЭВМ.

**Знать:**

- основные законы логики;
- основные понятия, определения и теоремы математического анализа;
- алгоритмы и методы решения задач математического анализа.

**Уметь:**

- логически мыслить;
- находить пределы, производные, интегралы;
- решать дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков;
- находить числовые характеристики случайных величин;
- моделировать коммерческие операции и экономические процессы;
- анализировать задачи планирования экономических и финансовых операций;
- рассчитывать основные характеристики экономических систем;
- самостоятельно пользоваться справочными пособиями при решении прикладных (в том числе экономических) задач.

**Владеть:**

- математическим аппаратом для исследования функций;
- методами постановки и решения задач математического анализа;
- культурой мышления, способностью к обобщению и анализу информации.

**Приобрести навыки:**

- решения типовых учебных задач;
- использования справочной литературы и интернет-ресурсов по математическому анализу.

### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	Семестры			
		1	2	3	4
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	126/3,5	70/1,94	56/1,56		

В том числе:					
Лекции	52/1,44	30/0,83	22/0,61		
Практические занятия (ПЗ)	74/2,06	40/1,11	34/0,94		
Семинары (С)					
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	<b>162/4,5</b>	<b>74/2,06</b>	<b>88/2,44</b>		
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>					
Выполнение домашних заданий					
Проработка лекций					
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)		Зачет	Экзамен		
			36/1		
Общая трудоемкость часы	324	144	180		
зачетные единицы	9	4	5		

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Структура и содержание учебной дисциплины (модуля)

#### Тема 1. Введение

Множество действительных чисел. Понятие функции. Способы задания функций. Элементарные функции. Простейшие неэлементарные функции.

#### Тема 2. Предел и непрерывность функции

Числовая последовательность и ее предел. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Односторонние пределы. Два замечательных предела.

Приращение функции. Возрастание и убывание функции. Свойства непрерывных функций.

#### Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Определение производной. Дифференцируемость и непрерывность функций. Геометрический, физический и экономический смысл производной. Свойства производной. Правила дифференцирования (включая производные сложной и обратной функции). Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталья. Дифференциал функции, его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала и его использование в приближенных вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков.

Исследование функций с помощью дифференциального исчисления. Условия возрастания и убывания функций. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Выпуклость графика функции. Точки перегиба и их нахождение. Асимптоты. Общая схема исследования функции.

Формулы Тейлора и Маклорена. Примеры разложения элементарных функций по формуле Маклорена.

#### **Темы 4, 5. Интегралы**

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, объем тела вращения. Приближенные методы вычисления определенного интеграла: формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Несобственные интегралы.

#### **Тема 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**

Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных. Полное и частное приращение функций. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функции. Геометрический смысл дифференцируемости функций двух переменных.

Производная по направлению. Градиент и его свойства. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие для случая двух независимых переменных. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции нескольких переменных. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Метод наименьших квадратов. Понятие о кратных интегралах.

#### **Тема 7. Дифференциальные уравнения**

Понятие о дифференциальном уравнении. Примеры торгово-экономических задач, приводящие к дифференциальным уравнениям. Порядок дифференциального уравнения. Семейство решений. Теорема существования и единственности решения (без доказательства). Задача Коши. Геометрическое истолкование решения. Общее и частное решение дифференциального уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными. Линейное уравнение первого порядка. Возможные случаи понижения порядка дифференциального уравнения (на примере уравнений второго порядка), когда в его записи отсутствуют независимая переменная или искомая функция.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Подбор частных решений при специальном виде правой части.

#### **Тема 8. Ряды**

Числовые ряды. Сходимость ряда. Сумма ряда. Свойства рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Теорема сравнения. Признаки сходимости Даламбера, Коши. Знакопередающиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.

Степенные ряды. Радиус, интервал и область сходимости. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена или Тейлора. Использование рядов для приближенных вычислений.

#### **Тема 9. Ряды Фурье**

Вид ряда Фурье. Принцип ортогональности базовых функций и формулы для коэффициентов. Сходимость рядов Фурье. Смысл коэффициентов Фурье в экономическом анализе как оценки циклической составляющей. Дискретное преобразование Фурье.

## 5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин
1	Микроэкономика	2,3
2	Макроэкономика	3,6
3	Эконометрика	3,7-9
4	Статистика	3-6
5	Финансы	3,5
6	Деньги, кредит, банки	3,5
7	Макроэкономическое планирование и прогнозирование	2-7
8	Мировая экономика и международные экономические отношения	3,6

## 5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Раздел учебной дисциплины	Семестр	Виды учебной деятельности		
			лекции	практич. занятия	самост. работа
1	Введение	1	2	-	2
2	Предел и непрерывность функции	1	4	8	22
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	1	4	8	14
4	Неопределенный интеграл	1	4	10	12
5	Определенный интеграл	1	4	8	12
<b>Итого за 1 семестр</b>			<b>30</b>	<b>40</b>	<b>74</b>
6	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	2	6	12	20
7	Дифференциальные уравнения	2	8	12	26
8	Ряды и степенные ряды	2	8	10	24
9	Ряды Фурье	2	6	10	20
<b>Итого за 2 семестр</b>			<b>22</b>	<b>34</b>	<b>88</b>
<b>Итого</b>			<b>52</b>	<b>74</b>	<b>126</b>

## 6. Перечень практических занятий

Перечень семинарских и практических занятий (соответствует темам лекций):	
бчас.	
Предел и непрерывность функции.	8
Дифференциальное исчисление функций одной переменной.	8 час
Неопределенный интеграл.	10 час
Определенный интеграл.	8 час
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	12час



Дифференциальные уравнения.	12час
Ряды.	10час
Ряды Фурье	10час

## 7. Примерная тематика курсовых проектов (работ)

В дисциплине выполнение курсовых проектов (работ) не предусматривается.

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 8.1. Основная литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб. пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - СПб.: Питер, 2009. - 464 с. - (Учебное пособие).-гриф УМО
2. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Н.Ш.КРЕМЕРА. - 3-е изд.. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. - 479 с. - (Золотой фонд российских учебников).-гриф МО РФГмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977.
3. Ячменёв Л.Т. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с. - (Высшее образование; Бакалавриат). -1000 экз.-гриф МО РФ
4. Красс М. С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 472 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование).-гриф УМО- режим доступа: <http://znanium.com/>

### 8.2. Дополнительная литература

5. Красс М. С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 472 с.: 60х90 1/16. - (Высшее образование).-гриф УМО - режим доступа: <http://znanium.com/>
6. Журнал «Естественные и математические науки в современном мире» 2012-2014 гг. - режим доступа: [НЭБ Elibrary.ru](http://elibrary.ru)
7. Орлова И.В. Экономико – математическое моделирование : Практическое пособие по решению задач. – М.: Вузовский учебник, 2004
8. Новицкий Н.И. Сетевое планирование и управление производством: Учебно-практическое пособие – М.: Новое издание, 2004

### 8.3. Методическое обеспечение

1. Зайцев М.В., Лавриненко Т.А. Высшая математика. Сборник задач. Ч. 1. — М., РГТЭУ, 2005.
2. Зайцев М.В., Лавриненко Т.А., Туганбаев А.А. Высшая математика. Сборник задач. Ч. 2. — М., РГТЭУ, 2005.
3. Н.Н. Груздева, Л.Н. Малёж Математика. Методические указания по выполнению контрольных работ для студентов первого года обучения специальностей 080105, 080102, 080502 (сокращенная подготовка, заочная форма обучения). – Иваново: Изд-во «Ивановский государственный университет», 2005.
4. Н.Н. Груздева, Л.Н. Малёж Математика. Методические указания по выполнению контрольных работ для студентов 2 курса заочной формы обучения. – Иваново: Изд-во «Ивановский государственный университет», 2005.

### 8.4. Информационное обеспечение дисциплины

При изучении курса Математика могут быть использованы интернет – ресурсы:

[www.Math-Net.ru](http://www.Math-Net.ru) – имеется свободный доступ (по истечении 3-х лет со дня публикации) к математическим журналам Отделения Математики РАН,

<http://en.wikipedia.ru> – созданная пользователями интернет-энциклопедия,

<http://mathworld.wolfram.com> – краткие энциклопедические статьи по математике,

<http://eqworld.ipmnet.ru> – решение различных типов уравнений, в том числе, дифференциальных,  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk> – статьи по истории математики.

## 9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

При подготовке к практическим занятиям и самостоятельной работе используются компьютерные классы со стандартным программным обеспечением:

- ОС Windows,
- пакет программных средств офисного назначения MS Office,
- стандартные пакеты прикладных программ по математике.

На лекциях и практических занятиях могут быть использованы мультимедиа-проектор в комплекте с персональным компьютером и экраном.

## 10. Образовательные технологии

### Перечень педагогических методов обучения и форм организации занятий

- лекции, в том числе: интерактивные, частично проблемные и с использованием компьютерных презентаций;
- семинары, в том числе с использованием активных методов обучения, на которых обсуждаются основные проблемы, освещенные в лекциях и сформулированные в домашних заданиях;
- письменные или устные домашние задания;
- круглые столы;
- тематические дискуссии, в том числе интерактивные;
- тестирование, в том числе с использованием компьютеров;
- консультации;
- самостоятельная работа студентов, в которую входит освоение теоретического материала, подготовка к семинарским занятиям, выполнение расчетно-аналитических заданий, а также разработка рефератов (проблемно-поисковых заданий), написание тезисов выступлений для круглых столов и дискуссий.

**«Круглый стол»** - один из наиболее эффективных способов для обсуждения острых, ложных и актуальных на текущий момент вопросов в любой профессиональной сфере, обмена опытом и творческих инициатив. Такая форма общения позволяет лучше усвоить материал, найти необходимые решения в процессе эффективного диалога. Их целесообразно проводить по темам в ходе изучения соответствующих тем в часы, выделенные для семинарских занятий.

**Дискуссия** – форма учебной работы, в рамках которой студенты высказывают свое мнение по проблеме, заданной преподавателем. Проведение дискуссии по проблемным вопросам предполагает написание студентами тезисов выступлений (докладов) или рефератов по предложенной тематике. Их целесообразно проводить по темам в часы, выделенные для семинарских занятий.

**Тестирование** – контроль знаний с помощью тестов, которые состоят из условий (вопросов) и вариантов ответов для выбора (самостоятельная работа студентов). Тесты составлены для тем и предназначены для самопроверки и для проверки текущих знаний. Тестирование может проводиться как на бумажных носителях, так и с использованием компьютеров.

**Активные и интерактивные** формы проведения занятий (деловые и ролевые игры, разбор конкретных ситуаций, тренинги) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью (миссией) программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, и в целом в учебном процессе они должны составлять не менее 10 процентов аудиторных занятий. Занятия лекционного типа для соответствующих групп студентов не могут составлять более 50 процентов аудиторных занятий.

## **11. Оценочные средства. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины**

### **Балльная система оценки:**

#### **Очное отделение:**

##### **1 семестр.**

Аудиторные контрольные работы:

- Дифференциальное исчисление (20 баллов)
- Интегральное исчисление (20 баллов)

Домашняя контрольная работа:

- Исследование функций и построение графиков (20 баллов)

Реферативная работа (10 баллов)

Бонусные баллы за активность на практических занятиях (10 баллов)

Зачет (30 баллов)

##### **2 семестр**

Аудиторные контрольные работы:

- Функции нескольких независимых переменных; (15 баллов)
- Дифференциальные уравнения; (15 баллов)
- Ряды. (15 баллов)

Домашние контрольные работы:

- Дифференциальные уравнения; (5 баллов)
- Ряды; (5 баллов)
- Ряды Фурье (5 баллов)

Реферативная работа (10 баллов)

Бонусные баллы за активность на практических занятиях (10 баллов)

Экзамен (30 баллов)

#### **Заочное отделение:**

##### **1 семестр.**

- Выполнение межсеместровой контрольной работы (30 баллов)
- Активность на установочной сессии (20 баллов)
- Реферативная работа (10 баллов)
- Активность в межсессионный период
- Экзамен (30 баллов)

##### **2 семестр.**

- Выполнение межсеместровой контрольной работы (30 баллов)
- Активность на установочной сессии (20 баллов)
- Реферативная работа (10 баллов)
- Активность в межсессионный период
- Экзамен (30 баллов)

## 11.1. Темы практических занятий

### Раздел 1. Дифференциальное исчисление.

#### Тема 1. Предел и непрерывность функции

ВОПРОСЫ К ТЕМЕ:

1. Сформулируйте определение понятия функции. Что называется областью определения функции?
2. Какие функции называются элементарными?
3. Какой вид имеют графики функций  $y = a^x$  при  $a > 1$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ? Укажите области определения и множества значений этих функций. Какие из этих функций являются чётными?
4. При каких условиях число  $b$  называется пределом функции  $f(x)$  при стремлении  $x$  к числу 2, к бесконечности  $-\infty, +\infty$ ? Прочитайте формулы  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  и объясните их смысл.
5. Пределом какой функции при  $x \rightarrow 0$  является число  $e$ ? Найдите в учебнике значение числа  $e$  с двумя знаками после запятой. Как называется и обозначается логарифм числа  $x$  по основанию  $e$ ?
6. Какому числу равен предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ? Какому числу равен предел  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x$ ?
7. Какие правила применяются при вычислении пределов суммы, разности и отношения двух функций?
8. Как определяется непрерывность функции  $f(x)$  в точке  $a$ ?
9. Какие точки разрыва функции вы знаете? Что называют скачком функции?

#### Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

ВОПРОСЫ К ТЕМЕ:

1. Сформулируйте определение производной. Каков геометрический смысл производной?
2. Каковы свойства производной? Как дифференцируется сложная функция.
3. Функция имеет производную в данной точке. Следует ли отсюда, что она непрерывна в этой точке? Справедливо ли обратное утверждение? Приведите пример функции непрерывной, но не дифференцируемой.
4. Сформулируйте теоремы Ролля и Лагранжа. Каков геометрический смысл этих теорем? Сформулируйте теорему Коши.
5. В чем заключается правило Лопиталья? При каких условиях применяется правило Лопиталья? Перечислите различные типы неопределённостей, для раскрытия которых может быть использовано это правило. Приведите примеры.
6. Что называется дифференциалом функции? Приведите примеры.
7. Каковы признаки возрастания и убывания функции?
8. Что такое экстремум функции? Каковы необходимые и достаточные условия экстремума? Приведите примеры.
9. Приведите пример, показывающий, что обращение производной в нуль не является достаточным условием экстремума.
10. Как найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции? Приведите примеры.
11. Какая линия называется асимптотой? Виды асимптот. Как находятся асимптоты?
12. Уравнение касательной к кривой в заданной точке.

#### Тема 3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

ВОПРОСЫ К ТЕМЕ:

1. Сформулируйте определения частных производных, градиента, производной по направлению.
2. Что называется полным приращением и полным дифференциалом функции двух переменных? Приведите примеры.
3. Каковы необходимые условия минимума (максимума) функции двух переменных?
4. Каковы достаточные условия минимума (максимума) функции двух переменных.?
5. Что такое условный экстремум?
6. Что такое абсолютный экстремум?
- 7.

## **Раздел 2. Интегральное исчисление**

### *Тема 4. Неопределенный интеграл*

ВОПРОСЫ К ТЕМЕ:

1. Сформулируйте определение первообразной функции. Докажите, что любые две первообразные одной и той же функции отличаются на константу.
2. Что называется неопределённым интегралом?
3. Назовите свойства неопределенного интеграла.
4. Непосредственное интегрирование неопределенного интеграла
5. Интегрирование неопределенного интеграла заменой переменных (метод подстановки).
6. Интегрирование неопределенного интеграла внесением под знак дифференциала.
7. Выведите формулу интегрирования по частям.
8. Интегрирование рациональных дробей.

### *Тема 5. Определенный интеграл*

ВОПРОСЫ К ТЕМЕ:

1. Что называется интегральной суммой функции  $f(x)$  на отрезке  $[a;b]$ . Какая фигура называется криволинейной трапецией? По какой формуле вычисляется её площадь?
2. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Свойства определенного интеграла.
4. Метод замены переменных в определенном интеграле.
5. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.
6. Какие свойства определённого интеграла Вам известны? В чём состоят определение и геометрический смысл несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования?
7. Виды несобственных интегралов.

На каждом практическом занятии помимо разбора теоретических вопросов студенты под руководством преподавателя самостоятельно решают задачи по текущим темам из сборников задач, разработанных преподавателями кафедры (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 1).

## **11.2. Задания для самостоятельной работы студентов**

### *Тема 1. Предел и непрерывность функции*

1. Привести примеры элементарных и неэлементарных функций.
2. Привести примеры сходящихся и расходящихся числовых последовательностей.
3. Доказать эквивалентность определения предела по Гейне и по Коши.
4. Доказать, что первый замечательный предел равен 1.
5. Привести пример функции, имеющий разрывы 2-го рода.

- Привести контрпримеры на основные теоремы о непрерывной на отрезке функции, для случая полуинтервала.
- Решить примеры из сборника 8.3.1 по теме 1.

### ***Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной***

- Привести примеры недифференцируемых функций.
- Доказать неравенство Йенсена для параболы используя определение выпуклой функции.
- Вывести правила вычисления эластичности функции, аналогичные правилам дифференцирования.
- Найти формулы Маклорена для функции  $\sqrt{1+x}$ .
- Доказать неравенство Коши, используя минимизацию параболы.
- Изучить метод минимизации Ньютона для одномерного случая.
- Решить примеры из сборника 8.3.1 по теме 2.

### ***Тема 3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных***

- Привести пример функции двух переменных непрерывной, но не имеющей частных производных в нуле.
- Изучить метод множителей Лагранжа.
- Решить примеры из сборника 8.3.1 по теме 3.

### ***Тема 4. Неопределенный интеграл***

- Доказать формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
- Доказать единственность неопределенного интеграла.
- Написать таблицу неопределенных интегралов.
- Решить примеры из сборника 8.3.1 по теме 4.

### ***Тема 5. Определенный интеграл***

- Найти точное значение интеграла  $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ .
- Вычислить с точностью до 0.001 интеграл  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$
- Найти приближенное значение  $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$  по формуле трапеций с  $n = 10$ .
- Доказать теорему о среднем для определенного интеграла от непрерывной функции.
- Доказать теорему о дифференцировании определенного интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу.
- Оценить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ .

## **11.3. Тематика контрольных работ и методические указания по их выполнению**

Контрольные работы выполняются студентами по следующим темам:

- Дифференциальное исчисление (итоговая аудиторная работа).
- Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Ряды (итоговая аудиторная работа).

**Контрольная работа по разделу «Дифференциальное исчисление»**

**1-10.** Найдите пределы функций:

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x^2}{x^5 + x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3 + 2x^2} - \sqrt{2x^2 - 4})$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/3x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$ ;
2. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 4x^2}{2x^4 - x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4 + 2x^2} - \sqrt{x^2 - 1})$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{-1/x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x}$ ;
3. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3 + 2x^2}{x^5 - x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{x^2 - 4})$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{1/2x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3}$ ;
4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + x^2 - 3}{x^3 - 2x^4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4 + x^3} - \sqrt{x^3 + 1})$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{5/2x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 + 1}$ ;
5. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^4}{-2x^5 + x^3 + 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 4x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4 + 2x^3} - \sqrt{x^3 - 4})$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{-3/2x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{e^x}$ ;
6. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 5x^3 + x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 4x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4 + x} - \sqrt{x - 4})$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ;
7. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + x^4} - \sqrt{x^4 - 4})$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-2x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2}{e^x - 1}$ ;
8. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + x^2 - 4}{x^5 + x^3 - 3x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{5 + x} - \sqrt{3x - 4})$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^{-4x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ ;

$$9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + x^2 - 5}{-4x^5 + x^3 - 7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 7x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4 + x^3} - \sqrt{x^3 - 4});$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{5x}\right)^{3x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x};$$

$$10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 - 5}{x^2 - x + 7}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 7x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + 2x^2} - \sqrt{x^2 - 1});$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{5x}\right)^{3x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - e^{-x}}.$$

**11-20.** Вычислите производные функций:

$$11. \text{ а) } y = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 3x - 5}; \text{ б) } y = e^{-x/3} \sin x; \text{ в) } y = \lg(2x^3 + 3x - 7);$$

$$\text{г) } y = \cos^{2x+1}(2x^2 - 3x + 4); \text{ д) } z = -2x^2 + 3xy + 3y^2 - x - 3y + 1;$$

$$12. \text{ а) } y = \frac{x-1}{2x^2 + 3x}; \text{ б) } y = e^{x/3} \cos 2x; \text{ в) } y = \lg(2x^2 - 5x + 1);$$

$$\text{г) } y = \sin^{-2x+3}(2x^2 - 3); \text{ д) } z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 5x - 3y + 10;$$

$$13. \text{ а) } y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x}; \text{ б) } y = e^{-x/3} \operatorname{tg} x; \text{ в) } y = \log_2(x^3 + 3x + 7);$$

$$\text{г) } y = \cos^{-2x+1}(2x^2 - 4); \text{ д) } z = -2x^2 - 3xy + 3y^2 - x - 5y;$$

$$14. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 3x}; \text{ б) } y = e^{-2x/3} \cos 2x; \text{ в) } y = \log_3(2x^2 - 3x + 12);$$

$$\text{г) } y = \operatorname{tg}^{2x-1}(2x^2 - 3x + 4); \text{ д) } z = 2x^2 - 5xy + 3y^2 - 3x - 3y + 7;$$

$$15. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 3}; \text{ б) } y = e^{-x/3} \cos 3x; \text{ в) } y = \log_4(2x^3 + 7);$$

$$\text{г) } y = \sin^{-2x-3}(3x^2 - x + 4); \text{ д) } z = 21x^2 + 7xy - 4y^2 - x - 3y + 10;$$

$$16. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 1}{2x + 3}; \text{ б) } y = e^{2x/3} \cos 2x; \text{ в) } y = \ln(4x^2 + 7);$$

$$\text{г) } y = \cos^{2x+1}(x^2 - 3x + 4); \text{ д) } z = 2x^2 - 7xy + 3y^2 - x - 3y + 12;$$

$$17. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 4x}{2x^2 - 5}; \text{ б) } y = e^{-4x/3} \sin 2x; \text{ в) } y = \log_3(-5x^3 + 3x^2 + 7);$$

$$\text{г) } y = \operatorname{tg}^{x+1}(2x^2 - 3x + 5); \text{ д) } z = -5x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 3y + 20;$$

$$18. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 3x}; \text{ б) } y = e^{-x/3} \operatorname{tg} 2x; \text{ в) } y = \lg(2x^3 + 4x + 7);$$

$$\text{г) } y = \sin^{x-1}(2x^2 - x + 3); \text{ д) } z = 5x^2 + 7xy + 3y^2 - x - 3y + 7;$$



19. а)  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-2x^2 + x}$ ; б)  $y = e^{5x/3} \sin 4x$ ; в)  $y = \log_5(2x^2 - 4x + 3)$ ;

г)  $y = \operatorname{tg}^{2x}(2x^2 - x + 4)$ ; д)  $z = -3x^2 + 4xy + 3y^2 - x - 3y + 8$ ;

20. а)  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3}$ ; б)  $y = e^{-x/3} \operatorname{tg} 4x$ ; в)  $y = \ln(2x^3 + 3x + 7)$ ;

г)  $y = \sin^{3x+1}(x^2 - 3)$ ; д)  $z = -7x^2 + 7xy - 3y^2 - x - 3y + 9$ .

21-30. Найдите критические точки функции  $y = f(x)$  и проверить в них выполнение достаточного условия экстремума:

21.  $f(x) = x \ln^2 x$ ;

22.  $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 1}$ ;

23.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ ;

24.  $f(x) = \sqrt[4]{\ln^2 x - 2}$ ;

25.  $f(x) = x \ln^2(3x)$ ;

26.  $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{e^{3x}}$ ;

27.  $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1}$ ;

28.  $f(x) = 2x \ln^2(5x)$ ;

29.  $f(x) = \sqrt[3]{\ln^2 x - 4}$ ;

30.  $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{e^x}$ .

31-40. Найдите наибольшее значение функции  $y = f(x)$  на отрезке  $I$ :

31.  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2, I = [0;1]$ ;

32.  $f(x) = -x^3 - x^2 + x - 3, I = [-1;2]$ ;

33.  $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4, I = [0;1]$ ;

34.  $f(x) = -x^3 - x^2 + x - 1, I = [-1;1]$ ;

35.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2, I = [-1;1]$ ;

36.  $f(x) = -x^3 - 4x^2 + x + 1, I = [-2;1]$ ;

37.  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 5, I = [-2;3]$ ;

38.  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 7, I = [-3;2]$ ;

39.  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6, I = [-3;1]$ ;

40.  $f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 2, I = [-3; 3]$ .

41-50. Исследуйте функцию  $y = f(x)$  и постройте ее график:

41.  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ ;

42.  $f(x) = \frac{1+x^2}{2-x}$ ;

43.  $f(x) = \frac{2-x^2}{x-3}$ ;

44.  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ ;

45.  $f(x) = \frac{x+2}{1-x^2}$ ;

46.  $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+2x}$ ;

47.  $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+x}$ ;

48.  $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ ;

49.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$ ;

50.  $f(x) = \frac{x^2-x}{x+2}$ .

51-60. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  - корни уравнения  $az^2 + bz + c = 0$ . Вычислите  $z_1 \pm z_2, z_1 z_2,$

$z_1 / z_2, z_1^{50}, z_2^{-100}$ :

51.  $a = 1, b = -2, c = 2$ ;

52.  $a = 2, b = -2, c = 1$ ;

53.  $a = -1, b = 2, c = -2$ ;

54.  $a = 1, b = -3, c = 25/4$ ;

55.  $a = 1, b = 3, c = 25/4$ ;

56.  $a = 2, b = -3, c = 25/8$ ;

57.  $a = 2, b = 3, c = 25/4$ ;

58.  $a = -2, b = 2, c = -1$ ;

59.  $a = 3, b = -1, c = 1/6$ ;

60.  $a = 3, b = 1, c = 1/6$ .

**61-70.** При производстве некоторого вида продукции используются ресурсы I и II в количестве  $x$  и  $y$  единиц соответственно. Прибыль, полученная от продажи всего товара, описывается функцией  $f(x, y)$ . Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной, если известно, что суммарные издержки составят  $g(x, y)$ :

**61.**  $f(x, y) = x^{0,25} y^{0,25}$ ,  $g(x, y) = x + y - 1$ ;

**62.**  $f(x, y) = 3x^{0,25} y^{0,5}$ ,  $g(x, y) = x + 2y - 1$ ;

**63.**  $f(x, y) = 2x^{0,5} y^{0,25}$ ,  $g(x, y) = 2x + y - 1$ ;

**64.**  $f(x, y) = x^{0,35} y^{0,25}$ ,  $g(x, y) = x + y$ ;

**65.**  $f(x, y) = 2x^{0,25} y^{0,35}$ ,  $g(x, y) = 3x + y - 2$ ;

**66.**  $f(x, y) = 4x^{0,35} y^{0,35}$ ,  $g(x, y) = x + 3y - 1$ ;

**67.**  $f(x, y) = 4x^{0,25} y^{0,45}$ ,  $g(x, y) = 2x + y$ ;

**68.**  $f(x, y) = 4x^{0,45} y^{0,25}$ ,  $g(x, y) = x + 4y - 1$ ;

**69.**  $f(x, y) = 10x^{0,45} y^{0,45}$ ,  $g(x, y) = x + y - 1$ ;

**70.**  $f(x, y) = x^{0,45} y^{0,5}$ ,  $g(x, y) = 2x + 4y - 1$ .

**Контрольная работа по разделу «Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Ряды»**

**1-10.** Вычислите интегралы:

**1. а)**  $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[4]{x}} dx$ ; **б)**  $\int \sin(2x + 7) dx$ ;

**в)**  $\int x e^x dx$ ; **г)**  $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 10} dx$ ;

**2. а)**  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ ; **б)**  $\int \cos(2x + 7) dx$ ;

**в)**  $\int x \cdot 2^x dx$ ; **г)**  $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x} dx$ ;

**3. а)**  $\int \frac{\sqrt[3]{x^4} - 2}{\sqrt[3]{x}} dx$ ; **б)**  $\int \sin(-5x + 6) dx$ ;

**в)**  $\int x \cdot \ln x dx$ ; **г)**  $\int \frac{-2x + 1}{x^2 - 2x} dx$ ;

4. а)  $\int \frac{2x + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}} dx$ ; б)  $\int e^{2x-7} dx$ ;  
 в)  $\int x \cdot \cos x dx$ ; г)  $\int \frac{2x+1}{x^2-x} dx$ ;

5. а)  $\int \frac{-3x + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x}} dx$ ; б)  $\int 2^{-3x-7} dx$ ;  
 в)  $\int x \cdot \sin x dx$ ; г)  $\int \frac{4x+10}{x^2-x-2} dx$ ;

6. а)  $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-9)}$ ;  
 в)  $\int x^2 \cdot \ln x dx$ ; г)  $\int \frac{3x-1}{x^2+x-2} dx$ ;

7. а)  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{\sin^2(-2x+8)}$ ;  
 в)  $\int x \cdot \lg x dx$ ; г)  $\int \frac{7x-14}{x^2-x-2} dx$ ;

8. а)  $\int \frac{\sqrt{x} + 2}{x} dx$ ; б)  $\int (4x-3)^{100} dx$ ;  
 в)  $\int \lg x dx$ ; г)  $\int \frac{4x-1}{x^2-5x-6} dx$ ;

9. а)  $\int \frac{-\sqrt{x} + 4x}{x} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{(7x-8)^{10}}$ ;  
 в)  $\int x e^{-2x} dx$ ; г)  $\int \frac{x-10}{x^2+5x-6} dx$ ;

10. а)  $\int \frac{-\sqrt[3]{x^4} - 3x}{\sqrt[3]{x}} dx$ ; б)  $\int (-5x+6)^{-100} dx$ ;  
 в)  $\int (2x-1) \cdot \cos x dx$ ; г)  $\int \frac{x+1}{x^2-4x} dx$ .

11–20. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

11.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ ;

12.  $y = 3x^2 + 7$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;

13.  $y = \frac{1}{2}x^2$ ,  $y = x + 2$ ;

14.  $y = \frac{2}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ;

15.  $y = \frac{1}{2}x^3 - x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;

16.  $y = \frac{1}{4}\sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \pi$ ;

17.  $y = \frac{1}{3}x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;

18.  $y = \frac{1}{2}\sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ ;

19.  $y = \frac{1}{3}x^3 + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$ ;

20.  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ ,  $y = 0$ .

**21–30. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси**

***Ox* фигуры, ограниченной линиями:**

21.  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ;

22.  $y = \frac{2}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ;

23.  $y = 3\sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \pi$ ;

24.  $8y - x^3 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ ;

25.  $y = 2\cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ;

26.  $y = \frac{5}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 5$ ;

27.  $y = 3\cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ ;

28.  $y^2 = 9x$ ,  $x = 4$ ;

29.  $y^2 - 4x = 0$ ,  $x = 5$ ;

30.  $y = \sqrt{x}$ ,  $x - 9 = 0$ .

**31-40. Решите дифференциальные уравнения:**

31. а)  $xy' - y = y^3$ ; б)  $y' = \frac{y}{x} - 1$ ;

в)  $y' - y = e^x$ ; г)  $y'' - 4y' + 4y = x^2$ ;

32. а)  $-xy' + y = y^2$ ; б)  $y' = -\frac{y}{x} + 2$ ;  
 в)  $y' + y = e^x$ ; г)  $y'' + 4y' + 4y = x^2 + 1$ ;
33. а)  $xy' = 1 - x$ ; б)  $(x - y)dx - x^2dy = 0$ ;  
 в)  $y' - 2y = e^{2x} \cdot \cos x$ ; г)  $y'' + y = x^2 + x$ ;
34. а)  $xy' = y^3$ ; б)  $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ ;  
 в)  $y' - y = e^x \cdot \sin 2x$ ; г)  $y'' - 4y' = -x^2$ ;
35. а)  $x^2y' - y = y^2$ ; б)  $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ ;  
 в)  $y' + 3y = e^{-3x} \cdot \sin x$ ; г)  $y'' - 2y' + y = -3x^2 + 3$ ;
36. а)  $x^3y' = y^3$ ; б)  $(x + y)dx - x^2dy = 0$ ;  
 в)  $y' - y = xe^x$ ; г)  $y'' - y' = -x^2 + 2$ ;
37. а)  $y' = e^{x+y}$ ; б)  $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ ;  
 в)  $y' - y = 5e^x$ ; г)  $y'' - 2y' + y = -x^2$ ;
38. а)  $xy' - y = 2y^2$ ; б)  $y' = \frac{y + 2x}{x}$ ;  
 в)  $y' - y = (2x - 5) \cdot e^x$ ; г)  $y'' - 5y' + 6y = x^2$ ;
39. а)  $(x + y)y' - 1 = 0$ ; б)  $y' = \frac{-y + 20x}{x}$ ;  
 в)  $y' - 3y = e^x$ ; г)  $y'' + 5y' + 6y = x^2 + x - 1$ ;
40. а)  $(2x - y)y' - 4 = 0$ ; б)  $y' = \frac{y - 5x}{x}$ ;  
 в)  $y' - y = x^2e^x$ ; г)  $y'' - 4y' + 4y = x^2 - x - 1$ ;

**41-50. Найдите решение дифференциального уравнения**

$y'' + ay' + b = cx + d$ , удовлетворяющее начальным условиям

$y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$ :

41.  $a = 1, b = 0, c = 1, d = 2, \alpha = 0, \beta = 1$ ;  
 42.  $a = -1, b = 0, c = -1, d = 2, \alpha = 1, \beta = 0$ ;  
 43.  $a = 2, b = 0, c = 2, d = -2, \alpha = 0, \beta = 0$ ;  
 44.  $a = 2, b = 1, c = -1, d = 3, \alpha = 0, \beta = 1$ ;  
 45.  $a = 0, b = 1, c = 3, d = -4, \alpha = 0, \beta = 0$ ;  
 46.  $a = 4, b = 0, c = -2, d = 1, \alpha = 1, \beta = 0$ ;

47.  $a = -5, b = 6, c = 3, d = 2, \alpha = 0, \beta = 1;$

48.  $a = 5, b = 6, c = -1, d = 2, \alpha = 0, \beta = 1;$

49.  $a = -2, b = 1, c = 1, d = 1, \alpha = 1, \beta = 1;$

50.  $a = 2, b = -3, c = 4, d = -2, \alpha = 1, \beta = 1.$

**51-60. Исследуйте на сходимость следующие числовые ряды:**

51. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{7n+2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{(n+1)!};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+2};$

52. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n+2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^2+4n+1}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3n}{n^2-5};$

53. а)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-2n-3}{n-2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+3};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5+4n}};$  г)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1};$

54. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n-3}{n+2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^7+n}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+3};$

55. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n-3}{n-2n^2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+4}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n-1};$

56. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-n}{3n-2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!};$  в)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5-n}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n};$

57. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n-5}{n-2n^2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n^7+4n}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2-1};$

58. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2n-3}{n^3-25n-5};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[4]{n^5+4n}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n};$

59. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2n^3-3}{n-2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[4]{n^{10}+n}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \lg n}{n^2};$

60. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2n-3}{3n^2-n-2};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!};$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[5]{n^{15}+4}};$  г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}};$

**61-70. Разложите в степенной ряд по степеням  $x$  функцию  $y = f(x)$  и**

**найдите область сходимости полученного степенного ряда:**

61.  $f(x) = \cos^2 x;$

62.  $f(x) = \cos 2x$ ;

63.  $f(x) = e^{-2x}$ ;

64.  $f(x) = \sin 2x$ ;

65.  $f(x) = \sin^2 x$ ;

66.  $f(x) = \ln(1-x)$ ;

67.  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ;

68.  $f(x) = \ln(1+2x)$ ;

69.  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ ;

70.  $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ .

#### 11.4. Вопросы для подготовки к экзамену/зачету

##### 1. Теоретические вопросы для подготовки к промежуточной аттестации за 1-ый семестр

1. Понятие функции. Способы задания функций. Примеры. Элементарные функции.
2. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Примеры.
3. Предел функции (два определения). Основные теоремы о пределах. Второй замечательный предел.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Первый замечательный предел, его геометрический смысл.
5. Предел функции. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции и их классификация. Примеры.
6. Функции, непрерывные на отрезке (определение). Свойства функций, непрерывных на отрезке.
7. Производная функции её геометрический и механический смысл. Дифференцируемость и непрерывность функции.
8. Производные элементарных функций.
9. Основные правила дифференцирования.
10. Дифференциал функции и его использование в приближенных вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков.
11. Теорема Ферма (с доказательством).
12. Теорема Ролля (с доказательством).
13. Теорема Лагранжа (с доказательством).
14. Теорема Коши. Правило Лопиталя.
15. Возрастание и убывание функции. Исследование возрастания и убывания функции с помощью производной.
16. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.
17. Формулы Тейлора и Маклорена.
18. Выпуклость графика функции. Исследование выпуклости с помощью второй производной. Точки перегиба.
19. Асимптоты. Общая схема исследования функций.
20. Эластичность функции, анализ спроса и предложения.
21. Простейшие оптимизационные задачи в области коммерции.



22. Решение задачи о хранении вина.
23. Понятие функции нескольких переменных, предел и непрерывность, частные производные и дифференциал.
24. Производная функции двух переменных по направлению. Градиент и его свойства.
25. Необходимое и достаточное условия локального экстремума функции двух переменных.
26. Условный экстремум.

2. Теоретические вопросы для подготовки к промежуточной аттестации за 2 семестр

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Правила интегрирования.
4. Метод интегрирования заменой переменных,
5. Метод интегрирования по частям.
6. Дробно-рациональные функции и их свойства.
7. Интегрирование дробно-рациональных функций.
8. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Свойства определенного интеграла.
10. Методы вычисления определенного интеграла
11. Геометрическое приложение определенного интеграла (площадь плоской фигуры).
12. Дифференциальные уравнения. Определение, основные понятия, задача Коши.
13. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
14. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
15. Дифференциальные уравнения второго порядка.
16. Числовые ряды, их сходимость.
17. Признак сравнения числовых рядов.
18. Признаки сходимости Даламбера и Коши.
19. Интегральный признак Маклорена-Коши сходимости числовых рядов.
20. Знакопередающиеся числовые ряды. Условная и абсолютная сходимость.
21. Принцип Лейбница об условной сходимости знакопередающихся числовых рядов.
22. Понятие о функциональном ряде.
23. Степенные ряды. Радиус, интервал и область сходимости.
24. Ряды Маклорена и Тейлора.
25. Разложения основных элементарных функций в степенные ряды.
26. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Задачи к зачетам (и экзаменам) генерируются непосредственно перед зачетом и в открытый доступ не поступают.

## Приложение

### Задания для практических занятий по темам

#### Понятие функции

**1.1.** Найти области определения и построить графики функций:

- |                              |                            |
|------------------------------|----------------------------|
| 1) $y = \sqrt{x}$            | 6) $y = -x^2 + 1$          |
| 2) $y = \sqrt{-x}$           | 7) $y = (x - 1)^2 + 2$     |
| 3) $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ | 8) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ |
| 4) $y = \sqrt{1 - x}$        | 9) $y = \frac{1}{1 - x}$   |
| 5) $y = x +  x $             | 10) $y = \sqrt{ x } - 1$   |

**1.2.** Найти области определения функций

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1) $y = \sqrt{x - 1} - \sqrt{5 - x}$ | 5) $y = \sqrt{(x - 1)(x - 2)}$                 |
| 2) $y = \log_2 \sqrt{x}$             | 6) $y = \log_x \sqrt{2 - x}$                   |
| 3) $y = \sqrt{\ln x}$                | 7) $y = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 - 1}$ |
| 4) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 1} - 1}$  | 8) $y = \frac{1}{\sqrt{-x} - \sqrt{2 + x}}$    |

**1.3.** По заданным функциям  $f(x)$  и  $g(x)$  построить сложную функцию  $y = f(g(x))$ :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $f(x) = \ln x$ , $g(x) =  x $ ;       | 6) $f(x) = x + 1$ , $g(x) = x^2$ ;                                   |
| 2) $f(x) =  x $ , $g(x) = \ln x$ ;       | 7) $f(x) = \ln x$ , $g(x) = e^x$ ;                                   |
| 3) $f(x) = \sin x$ , $g(x) = \sqrt{x}$ ; | 8) $f(x) = e^x$ , $g(x) = \ln x$ ;                                   |
| 4) $f(x) = \sqrt{x}$ , $g(x) = \sin x$ ; | 9) $f(x) = \operatorname{tg} x$ , $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ;  |
| 5) $f(x) = x^2$ , $g(x) = x + 1$ ;       | 10) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ , $g(x) = \operatorname{tg} x$ . |

#### Числовая последовательность и ее предел

**1.4.** Написать пять первых членов последовательности:

- |                              |                                    |
|------------------------------|------------------------------------|
| 1) $x_n = \frac{1}{n}$ ;     | 5) $x_n = n^2 - 1$ ;               |
| 2) $x_n = \frac{1}{n + 1}$ ; | 6) $x_n = 10^n$ ;                  |
| 3) $x_n = (-1)^n \cdot n$ ;  | 7) $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ ;     |
| 4) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ ; | 8) $x_n = (1 + n)^{\frac{1}{2}}$ . |

1.5. Написать формулу общего члена последовательности:

- 1)  $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \dots$       3)  $0; 0,9; 0,99; 0,999; \dots$   
 2)  $2; \sqrt{2}; \sqrt[3]{2}; \sqrt[4]{2}; \dots$       4)  $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \dots$

Используя определения предела последовательности, доказать равенства:

$$\begin{aligned} 1.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0; & \quad 1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1; \\ 1.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} = 0; & \quad 1.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0; \\ 1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0; & \quad 1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

### Предел функции.

Используя определения предела функции, доказать равенства

$$\begin{aligned} 1.12. \lim_{x \rightarrow 1} (3x+2) = 5; & \quad 1.13. \lim_{x \rightarrow -1} (1-2x) = 3; \\ 1.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty; & \quad 1.15. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2-1) = \infty; \\ 1.16. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}; & \quad 1.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0; \end{aligned}$$

Найти пределы:

$$\begin{aligned} 1.17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-2}; & \quad 1.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2}; \\ 1.19. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x-1} - \frac{1+x}{x-1} \right); & \quad 1.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+16}-4}; \\ 1.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}; & \quad 1.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2}; \\ 1.23. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x); & \quad 1.24. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}-x); \\ 1.25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}; & \quad 1.26. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}; \\ 1.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}; & \quad 1.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x-8}{x^3+4}; \\ 1.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3+x)}{1-\frac{1}{x}}; & \quad 1.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x+x^2}{1+x-x^2}; \\ 1.31. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}; & \quad 1.32. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Используя первый замечательный предел, вычислить:

1.33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ ;                      1.34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ;

1.37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x}$ ;                      1.36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$ ;

1.38.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos 2x}$ ;                      1.39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;

1.40.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos x}$ ;                      1.41.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ ;

1.42.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\pi - x}$ ;                      1.43.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$ ;

### Непрерывность функций. Точки разрыва.

Найти точки разрыва функции

1.44.  $y = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ ;                      1.45.  $y = \frac{x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ ;

1.46.  $y = \frac{x}{\ln(1 + x^2)}$ ;                      1.47.  $y = \frac{3x + 2}{2x + 3}$ ;

1.48.  $y = \frac{x + \pi}{\sin \pi x}$ ;                      1.49.  $y = \frac{x + 1}{x^3 - 1}$ ;

1.50.  $y = \frac{x - 1}{x^3 + 1}$ ;                      1.51.  $y = \frac{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$ ;

1.52.  $y = \frac{x + 2}{x - 3} + \frac{x - 3}{x + 2}$ .

1.81. Исследовать на непрерывность функцию  $y = \frac{1}{(x - 1)(x - 6)}$  на отрезке:

1) [2;5];                      2) [4;10];                      3) [0;7].

1.82. Исследовать на непрерывность функцию  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 10} + \frac{1}{x + 10}$

на отрезке:

1) [-2;2];                      2) [-20;20];                      3) [1;5];                      4) [-1;5];  
5) [2;12];                      6) [0,1;9,9];                      7) [-11;-9];                      8) [-90;-20].

Определить характер точек разрыва:

$$1.55. y = \frac{x+2}{x-2}; \quad 1.56. y = \frac{1}{(x-2)(x-3)};$$

$$1.57. y = \frac{1}{1-e^{1-x}}; \quad 1.58. y = \frac{e^x}{(x-1)^2};$$

$$1.59. y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}; \quad 1.60. y = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$1.61. y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Литература :[1,4,6,9,10,12,13,14,15]

Учебно-методическая литература:[1]

### Понятие производной. Вычисление производных.

Исходя из определения производной, найдите производную функции:

$$2.1. y = 2x + 3. \quad 2.2. y = 1 - 5x. \quad 2.3. y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}.$$

$$2.4. y = (x+1)^2. \quad 2.5. y = \sqrt{x+1}. \quad 2.6. y = \frac{1}{x-2}.$$

Вычислить производные:

$$2.7. 1) x^2 - 6x + 8; \quad 6) \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$2) 1 + x + x^2 + x^3; \quad 7) \sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}};$$

$$3) -1 - x^{-1} - x^{-2}; \quad 8) x + \frac{1}{x};$$

$$4) 2x + 2\sqrt{x}; \quad 9) 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3};$$

$$5) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}; \quad 10) -\frac{2}{5}\sqrt{x^5}.$$

$$2.8. 1) \sin x - \cos x; \quad 4) x - \operatorname{arctg} x;$$

$$2) \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}; \quad 5) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x;$$

$$3) x - \operatorname{arcsin} x; \quad 6) \cos x + \operatorname{arccos} x.$$

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные функций:

$$2.9. y = \cos(x^2 + 2x - 4). \quad 2.10. y = \sin(x^3 - 3x + 5).$$

$$2.11. y = \sin e^x. \quad 2.12. y = \cos \ln x.$$

$$2.13. y = e^{2x-3}. \quad 2.14. y = e^{-x^2}.$$

$$2.15. y = e^{\operatorname{tg} x}. \quad 2.16. y = e^{\sin x}.$$

$$2.17. y = \ln(1 + 2\sqrt{x}). \quad 2.18. y = \ln(2x^2 + 4x - 1).$$

Составить уравнения касательных к графикам функций:

2.19.  $y=x^2 - 3x + 2$  в точке (3;2).

2.20.  $y=\sqrt{x}$  в точке (4;2).

2.21.  $y= \ln x$  в точке пересечения с осью Oх.

2.22.  $y= x^2 - 5x + 6$  в точках пересечения с осью Oх.

2.23.  $y=e^{7x}$  в точке пересечения с осью Oу.

### Понятие дифференциала.

### Производные и дифференциалы высших порядков.

Найти дифференциалы функций:

2.24.  $y= x^3 - 3\ln x$ .

2.25.  $y= \cos x \times e^x$ .

2.26.  $y= \sin 3x$ .

2.27.  $y= \operatorname{tg} \ln x$ .

2.28.  $y= x^2 \operatorname{arctg} x$ .

2.29.  $y= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ .

2.30.  $y= \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ .

2.31.  $y= \sin 2x + 2x\sqrt{x}$ .

2.32. Найти приближенно приращение  $\Delta y$ :

1) функции  $y= \frac{1}{\sqrt{x}}$ , если  $x= 4$ ,  $\Delta x= 0,08$ ;

2) функции  $y= \sin x$ , если  $x= \frac{\pi}{3}$ ,  $\Delta x= 0,02$ ;

Найти дифференциалы 2-го порядка от функций:

2.33.  $y= x^3 - 3x^2 + x + 1$ .

2.34.  $y= (0,1x+1)^5$ .

2.35.  $y= x \cos 2x$ .

2.36.  $y= \sin^2 x$ .

Найти производные 3-го порядка от функций:

2.37.  $y= e^x \times \cos x$ .

2.38.  $y= x^2 \times e^x$ .

2.39.  $y= \ln(2x+5)$ .

2.40.  $y= x \ln x$ .

Найти производные n-го порядка от функций:

2.41.  $y= \frac{1}{x}$ .

2.42.  $y= e^{2x}$ .

2.43.  $y= 5^x$ .

2.44.  $y= \ln(1+x)$ .

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Правило Лопиталья.

2.45. Удовлетворяют ли условиям теоремы Ролля функции:

1)  $f(x)=x$ ,  $x \in [0,1]$ ;

2)  $f(x)= \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0,1) \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}$ ;

Найти пределы с помощью правила Лопиталья:

2.46.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .

2.47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{e^{2x} - 1}$ .

$$2.48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$2.49. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - e^{\sin x}}.$$

$$2.50. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

$$2.51. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x}.$$

$$2.52. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 10)}{\ln(3x^2 + x - 5)}.$$

$$2.53. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}.$$

$$2.54. \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$2.55. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Исследование функций и построение графиков.

2.56. Найти максимумы и минимумы и промежутки возрастания и убывания функций:

1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ;    2)  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$ ;

3)  $f(x) = x \ln x$ ;    4)  $f(x) = x - \operatorname{arctg} 2x$ ;

Применение дифференциального исчисления в экономических вопросах.

2.57. Зависимость спроса (объема продаж) от цены выражается формулой  $d(p) = e^{-\frac{p^2}{16}}$ .  
Определить, для каких  $p$  спрос эластичен, неэластичен, нейтрален.

2.58. Зависимость спроса от цены при  $p \geq p_0$  выражается формулой  $d(p) = \frac{1}{p^\alpha}$ , где  $\alpha > 0$ -const. Определить, когда спрос будет эластичен, неэластичен, нейтрален.

2.59. Пусть  $x$  - объем продаж некоторого товара торговой фирмой,  $p(x)$  - функция спроса (выражает зависимость между ценой и объемом продаж),  $Z(x)$  - функция издержек (затраты фирмы на реализацию товара). Учитывая, что прибыль от продажи товара находится по формуле  $V(x) = x p(x) - Z(x)$ , определить:

а) интервалы значений объемов продаж, при которых торговля этим товаром будет прибыльной (убыточной);

б) оптимальные значения объема продаж  $x^*$  и цены  $p^*$ , обеспечивающие максимум прибыли  $V(x)$ , вычислить  $V_{\max}$ .

Используя эскизы графиков функций выручки  $W(x) = x p(x)$  и функции издержек  $Z(x)$ , дать геометрическую интерпретацию полученным результатам.

Выполнить задание для случаев:

1)  $p(x) = 155 - 3x$ ,     $Z(x) = 1800 + 5x$ ;

2)  $p(x) = 100 - 2x$ ,     $Z(x) = 375 + 3x^2$ ;

3)  $p(x) = \frac{10}{\sqrt{x}}$ ,     $Z(x) = 21 + x$ ;

Литература: [1, 4, 6]

Учебно-методическая литература: [1]

**Понятие функции нескольких переменных. Частные производные  
1-го и 2-го порядка. Дифференциал функции.**

**3.1.** Вычислить:

1) значения  $F(2,3)$ ,  $F(1,2)$ ,  $F(2,1)$ ,  $F(a,0)$ ,  $F(0,a)$ , если  $F(x, y) = \frac{x - 2y}{y^2 - x^2}$ ;

2) значения  $F(2,4)$ ,  $F(4,2)$ ,  $F(1,a)$ , если  $F(x, y) = x^y + \sqrt{y - 2x + 6}$ .

**3.2.** Найти области определения функций:

1)  $z = \frac{5}{x^2 + y^2}$ ;    2)  $z = \frac{1}{x + y}$     3)  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;

4)  $z = \ln(xy)$ ;    5)  $z = \frac{4}{x^2 - y^2}$ ;    6)  $z = \sqrt{x - y}$ ;

7)  $z = \arcsin(x^2 + y^2)$ .

**3.3.** Построить несколько линий уровня функций:

1)  $z=xy$ ;    2)  $z=y-x^2$ ;    3)  $z=\frac{5}{x+y}$ ;    4)  $z=\ln(x^2+y^2)$ ;    5)  $z=\frac{7}{x^2+y^2}$ .

Найти частные производные 1-го порядка функции:

**3.4.**  $z=x^2-2xy-5y^3$ .

**3.5.**  $z=2x^3+3x^2y-y+5$ .

**3.6.**  $z=e^{x^2-y^2}$ .

**3.7.**  $z=\ln(x^2+y^2)$ .

**3.8.**  $z=\frac{y}{x}$ .

**3.9.**  $z=\frac{x-y}{2x+y}$ .

**3.10.**  $z=x^y$ .

**3.11.**  $z=x^2e^{xy}$ .

**3.12.**  $z=\operatorname{arctg}(\sqrt{x}e^y)$ .

**3.13.**  $z=\arcsin\frac{y}{x}$ .

Найти частные производные 2-го порядка:

**3.14.**  $z=x^2-2xy+5y^2$ .

**3.15.**  $z=\sqrt{xy^2}$ .

**3.16.**  $z=\frac{x^2}{1-2y}$ .

**3.17.**  $z=\ln(x^2-y^2)$ .

**3.18.** Найти частные производные 3-го порядка для функций:

1)  $z=2x^3+xy^2-y^3+y^2-x$ ;    2)  $z=\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}$ .

Производная по направлению и градиент функции.

**3.19.** Найти  $\operatorname{grad} z(x,y)$  для функции:

1)  $z = \sqrt{x}y + \operatorname{tg}(y^2)$ ;    2)  $z = \frac{xy}{e^x + e^y}$ ;

3)  $z = \ln(x\sqrt{y} + \sin x)$ ;    4)  $z = e^{\cos(x \ln y)}$ .



**3.20.** Построить линии уровня и  $\text{grad } z$  в точке  $A(1;2)$  для функций:

1)  $z=4-x^2-y^2$ ;                      2)  $z=x^2-y$ ;

3)  $z=2x+y-3$ ;                      4)  $z=\frac{y}{x}$ .

Экстремум функции двух переменных.

Найти экстремумы функции:

**3.21.**  $z=3x^2+xy+2y^2+4x-7y+15$ .

**3.22.**  $z=-x^2+2xy-2y^2+2x+20$ .

**3.23.**  $z=5x^2+2xy-y^2-4x-8y+10$ .

**3.24.**  $z=x^3+8y^3-6xy+1$ .

**3.25.**  $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$ .

**3.26.**  $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$ .

Литература :[1,4,6]

Учебно-методическая литература:[1]

### Понятие неопределенного интеграла.

#### Вычисление неопределенных интегралов.

**4.1.** Проверить, что:

1)  $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C$ ;

2)  $\int 2\sqrt{x}dx = \frac{4x\sqrt{x}}{3} + C$ ;

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ ;

4)  $\int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$ ;

5)  $\int \frac{dx}{x^4+x^2} = -\frac{1}{x} - \arctg x + C$ ;

6)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C$ ;

7)  $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx = \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \arctg(x+1) + C$ .

Вычислить интегралы:

4.2.  $\int (5x^4 - x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{x})dx$ .

4.3.  $\int (x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2})dx$ .

4.4.  $\int (2^x + 1)^2 dx$ .

4.5.  $\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2})dx$ .

4.6.  $\int \cos x(2\text{tg } x + \frac{e^x}{\cos x} + 4)dx$ .

4.7.  $\int \sin x(1 + \frac{2}{x^3 \sin x} - 4\text{ctg} x)dx$ .

4.8.  $\int \frac{2-x \cos^2 x + 3\text{ctg}^2 x + 5 \cos^3 x}{\cos^2 x} dx$ .

Вычислить интегралы:

4.9.  $\int \frac{3x-7}{x^2-5x+6} dx$ .

4.10.  $\int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx$ .

4.11.  $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ .

4.12.  $\int \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$ .

4.13.  $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx$ .

4.14.  $\int \frac{x^2 + 2}{x(x-2)(x+1)} dx$ .

4.15.  $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3} dx$ .

4.16.  $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$ .

4.17.  $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5} dx$ .

4.18.  $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+5} dx$ .

**Понятие определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла.**

4.19. Составлением интегральных сумм и переходом к пределу найти интегралы:

1)  $\int_a^b c dx$ ;      2)  $\int_0^a x dx$ ;      3)  $\int_0^a e^x dx$

4.20. Вычислить интегральную сумму  $S_5$  для интеграла  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ , разбив отрезок [1;2] на пять равных частей и взяв в каждой части ее середину. Сравнить с точным значением интеграла.

4.21. Выполнить задание предыдущей задачи для интеграла  $\int_1^2 x^2 dx$ .

Вычислить:

4.22.  $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4.23.  $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx$ .

4.24.  $\int_0^1 e^{2x} dx$ .

4.25.  $\int_0^1 (\sqrt{x} + x^2) dx$ .

4.26.  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$ .

4.27.  $\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$ .

**Геометрические приложения определенного интеграла.**

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

4.28.  $y = e^x$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ .

4.29.  $y = x^2 + 5x + 6$ ,  $x=-1$ ,  $x=2$ ,  $y=0$ .

4.30.  $y = -x^2 + 2x + 3$ ,  $y=0$ .

4.31.  $y = x^7$ ,  $x=2$ ,  $y=0$ .

4.32.  $y = \ln x$ ,  $x=e$ ,  $y=0$ .

4.33.  $y = \sin x$ ,  $y=0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .

Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

4.34.  $y = 4 - x^2$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ , где  $x \geq 0$ , вокруг: 1) оси  $Ox$ ; 2) оси  $Oy$ .

4.35.  $y = e^x$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $y=0$       вокруг: 1) оси  $Ox$ ; 2) оси  $Oy$ .

4.36.  $y = x^2 + 1$ ,  $y=0$ ,  $x=1$ ,  $x=2$       вокруг: 1) оси  $Ox$ ; 2) оси  $Oy$ .

## Несобственные интегралы.

Исследовать сходимость и вычислить сходящиеся интегралы:

4.37. 1)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ; 2)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ ; 3)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ ; 4)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ ,  $a > 0$ .

4.38. 1)  $\int_0^{+\infty} e^x dx$ ; 2)  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ .

4.39.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ . 4.40.  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

4.41.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x}$ . 4.42.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$ .

вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

Литература :[1,4,6]

Учебно-методическая литература:[1]

### Понятие о дифференциальных уравнениях.

Уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.

5.1. Выяснить, является ли функция  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  решением дифференциального уравнения

$$2y' + y^3 = 0.$$

5.2. Выяснить, является ли функция  $y = x + Cx^2$  решением дифференциального уравнения  $xy' - 2y + x = 0$ .

5.3. Является ли функция  $y = Ce^{x^2} + x$  решением дифференциального уравнения  $y' - 2xy + x^2 = 0$ ?

5.4. Является ли функция  $y = e^{\sin x} + C \cos x$  решением дифференциального уравнения  $y' - y \cos x = 0$ ?

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

5.5.  $\cos x (1 + y^4) dx = 2y dy$ .

5.6.  $\operatorname{tg} x \cdot y' = ctgy$ .

5.7.  $\sqrt{x} y' - (1 + 3x)y = 0$ .

5.8.  $(\sqrt{\sin x} \cdot y + \sqrt{\sin x}) y' - \sqrt{y} \cos x = 0$ .

### 5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Найти общее решение дифференциального уравнения:

5.9.  $y' - \frac{3y}{x} = x^3 \sin x$ . 5.10.  $y' + y \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x$ .

5.11.  $y' - 2y = 5e^x$ . 5.12.  $y' - 2xy = \frac{e^{x^2}}{1 + x^2}$ .

Литература :[1,4,6]

Учебно-методическая литература:[1]

**6.1.** Понятие числового ряда. Необходимое условие сходимости ряда.  
Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.

Вычислить первые четыре члена ряда:

6.1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ .

6.2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ .

6.3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ .

6.4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ .

6.5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

6.6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ .

6.7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n!}$ .

6.8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2} \cdot n!}{(2n-1)(2n+3)}$ .

Найти формулу для общего члена ряда:

6.9.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

6.10.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

6.11.  $\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$

6.12.  $-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2 \ln 3} - \frac{1}{3 \ln 4} + \frac{1}{4 \ln 5} - \dots$

6.13.  $5 - \frac{5^2}{4} + \frac{5^3}{9} - \frac{5^4}{16} + \dots$

6.14.  $\frac{2}{1} + \frac{4}{1 \cdot 2} + \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

Проверить, выполнено ли необходимое условие сходимости ряда:

6.15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n+100}$ .

6.16.  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$ .

6.17.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ .

6.18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ .

6.19.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n}$ .

6.20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ .

Разложить функцию в ряд Маклорена и найти интервал сходимости полученного ряда.

6.21.  $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$ .

6.22.  $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ .

6.23.  $f(x) = \sin 3x$ .

6.24.  $f(x) = e^{-5x}$ .

6.25.  $f(x) = \cos x^2$ .

6.26.  $f(x) = xe^{-x^2}$ .

6.27.  $f(x) = x^3 e^{5x}$ .

6.28.  $f(x) = x^2 \cos 2x$ .

6.29.  $f(x) = \sin^2 x$ .

6.30.  $f(x) = \cos^2 x$ .

Литература :[1,4,6]

Учебно-методическая литература:[1]

**Автор-составитель:**

Туртин Д.В. к.ф.-м.н., доцент кафедры МЭИ и ВТ