Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова
Ивановский филиал
Кафедра гуманитарных и правовых дисциплин

Утверждено
на заседании совета Ивановского филиала
протокол № 1 от 30.08.2014
Председатель совета ____________
Арефьева Н.Т.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Направление подготовки **09.03.03 Прикладная информатика**	Профиль подготовки – Прикладная информатика в экономике

Уровень высшего образования ***Бакалавриат***

Программа подготовки ***Академический бакалавриат***

Иваново

Автор-составитель: Туртин Д.В.
должность доцент, к.ф.-м.н.

Рабочая программа **Линейная алгебра**
(название дисциплины)

Рабочая программа учебной дисциплины «Линейная алгебра» составлена в соответствии с требованиями Федерального Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования

Дисциплина относится к базовой части дисциплин и является обязательной для изучения.

09.03.03 **«ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»**
(шифр) (наименование направления)

Утверждена на заседании Учебно-методического совета филиала «30» августа 2014 г., протокол № 1.

Согласования со смежной кафедрой:

Зав. кафедрой
К.э.н., доцент Е.С. Васильчук

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели освоения учебной дисциплины

Целью изучения первой части курса (Системы Линейных Уравнений и Векторная Алгебра) является освоение базовых понятий, методов и принципов линейной алгебры. Решение систем линейных уравнений является существенной составной частью регрессионного анализа, а векторная алгебра является важным средством экономического моделирования.

Вторая часть курса (Линейное Программирование) посвящена математическим методам решения задач линейной оптимизации, возникающим в широком круге экономических моделей, и применению этих моделей в расчетной и аналитической практике.

2. Место учебной дисциплины в структуре ООП

Дисциплина “Линейная алгебра” относится к базовой части. Рекомендуется изучать её во 2 семестре.

Дисциплина “Линейная алгебра” базируется на знаниях, полученных студентами в процессе освоения школьной программы по предмету Математика.

Дисциплина “Линейная алгебра” имеет логическую и содержательно-методологическую взаимосвязи с дисциплинами базовой части профессионального цикла (Б.3): Микроэкономика, Макроэкономика, Эконометрика, Статистика, Финансы, Деньги, кредит, банки, Макроэкономическое планирование и прогнозирование и Мировая экономика и международные экономические отношения.

3. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать: основы линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач;

уметь: применять методы линейной алгебры и моделирования для решения экономических задач;

владеть:

- навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач;
- методикой анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

Освоение этих навыков направлено на формирование следующих компетенций:

- способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7).

способностью собирать и анализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1).

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	2
Аудиторные занятия (всего)	56/1,56	56/1,56
В том числе:		
Лекции	28/0,78	28/0,78
Семинары (С)	28/0,78	28/0,78

Самостоятельная работа (всего)	52/1,44	52/1,44
В том числе:		
Контрольные работы		
Подготовка к экзамену		
Подготовка к зачету		
Другие виды самостоятельной работы		
Выполнение домашних заданий		
Работа с учебным материалом		
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	Экзамен 36/1	Экзамен 36/1
Общая трудоемкость часы	144	144
зачетные единицы	4	4

5. Структура и содержание учебной дисциплины (модуля)

5.1. Содержание разделов дисциплины

Тема 1. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений (СЛУ)

Понятие Определителя n-го порядка. Миноры, алгебраические дополнения. Способы вычисления и свойства определителей. Матрицы и действия над ними. Транспонированная матрица. Обратная матрица и способы ее нахождения. Ранг матрицы.

Линейные уравнения с n неизвестными. Условия совместности и определенности СЛУ. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Однородные системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Допустимое, базисное, опорное решение системы линейных уравнений.

Тема 2. Векторная алгебра

N-мерное арифметическое пространство — R^n. Геометрический смысл пространств R2 и R3. Векторы. Длина вектора. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Геометрический смысл линейной зависимости векторов. Базис и ранг системы векторов. Ортогональный и ортонормированный базисы. Представление вектора в координатной форме. Действия с векторами, заданными в координатной форме. Угол между векторами. Разложение вектора по произвольному базису.

Тема 3. Элементы аналитической геометрии

Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой. Понятие о кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

Прямая и плоскость в пространстве R.3. Расстояние от точки до плоскости. Векторное, параметрическое, каноническое уравнения прямой в R3.

Тема 4. Задача линейного программирования (ЛП)

Основная задача линейного программирования, ее экономическая интерпретация, целевая функция, вектор ограничений и матрица условий, формы задания ограничений, связь между задачами максимизации и минимизации. Каноническая и однородная формы

задачи линейного программирования. Геометрический метод решения задач линейного программирования.
Методика преобразования задач экономики, управления, коммерции, финансов к общей задаче линейного программирования.
Задача линейного программирования в симплексной форме. Первое опорное решение. Исследование опорного решения на оптимальность, критерий оптимальности. Условия неограниченности функции цели на множестве допустимых решений. Переход от одного опорного решения к другому. Алгоритм симплекс-метода в невырожденном случае, понятие о зацикливании. Метод искусственных базисных неизвестных. Геометрическая интерпретация симплекс-метода. Формализация и решение на ЭВМ оптимизационных экономических задач.
Правила построения двойственной задачи. Теоремы двойственности. Экономический смысл двойственных оценок и их устойчивость. Анализ чувствительности оптимального решения в задачах экономики, управления, финансов и коммерческой деятельности.

5.2. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин
1	Микроэкономика	
2	Макроэкономика	2,3
3	Эконометрика	1-3
4	Статистика	2
5	Финансы	2
6	Деньги, кредит, банки	2
7	Макроэкономическое планирование и прогнозирование	1,4
8	Мировая экономика и международные экономические отношения	1,2

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Раздел учебной дисциплины	Семестр	Виды учебной деятельности		
			лекции	семинары	самост. работа
1	Матрицы и определители. Системы линейных уравнений	2	8	10	16
2	Векторная алгебра	2	6	6	12
3	Элементы аналитической геометрии	2	6	6	12
4	Линейное программирование	2	8	6	12
5	Итого		28	28	52

6. Перечень практических занятий

- Определители и их свойства. (2 час.)
- Вычисление определителей. (2 час.)
- Матрицы. Действия над матрицами (2 час.)

- Обратная матрица (2 час.)
- СЛУ, методы их решений. (4час)
- Базисные решения. (2 час.)
- Векторы. Действия над векторами (4час)
- Линейная зависимость векторов. (4 час.)
- Аналитическая геометрия на плоскости. Прямая. (2 час.)
- Кривые второго порядка. (2 час.)
- Аналитическая геометрия в пространстве. Плоскость. (2 час.)
- Прямая в пространстве. (2 час.)
- Модели задач ЛП (2 час.)
- Геометрический метод решения ОЗЛП (2 час.)
- Симплекс-метод решения (4 час.)
- Двойственность в ЛП (4час)

7. Примерная тематика курсовых проектов (работ)

В дисциплине выполнение курсовых проектов (работ) не предусматривается.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

8.1. Основная литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб. пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - СПб.: Питер, 2009. - 464 с. - (Учебное пособие).-гриф УМО

2. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Н.Ш.КРЕМЕРА. - 3-е изд.. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. - 479 с. - (Золотой фонд российских учебников).-гриф МО РФГмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977.

3. Ячменёв Л.Т. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с. - (Высшее образование; Бакалавриат). -1000 экз.-гриф МО РФ

4. Красс М. С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 472 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование).-гриф УМО- режим доступа: http:/znanium.com/

8.2. Дополнительная литература

5. Красс М. С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: ИНФРА-М, 2011. - 472 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование).-гриф УМО - режим доступа: http:/znanium.com/

6. Журнал «Естественные и математические науки в современном мире» 2012-2014 гг. - режим доступа: НЭБ Elibrary.ru

7. Орлова И.В. Экономико – математическое моделирование : Практическое пособие по решению задач. – М.: Вузовский учебник, 2004

8. Новицкий Н.И. Сетевое планирование и управление производством: Учебно-практическое пособие – М.: Новое издание, 2004

8.3. Методическое обеспечение

1. Зайцев М.В., Лавриненко Т.А. Высшая математика. Сборник задач. Ч. 1. — М., РГТЭУ, 2005.

2. Зайцев М.В., Лавриненко Т.А., Туганбаев А.А. Высшая математика. Сборник задач. Ч. 2. — М., РГТЭУ, 2005.

3. Н.Н. Груздева, Л.Н. Малеж Математика. Методические указания по выполнению контрольных работ для студентов первого года обучения специальностей 080105, 080102, 080502 (сокращенная подготовка, заочная форма обучения). – Иваново: Изд-во «Ивановский государственный университет», 2005.

4. Н.Н. Груздева, Л.Н. Малеж Математика. Методические указания по выполнению контрольных работ для студентов 2 курса заочной формы обучения. – Иваново: Изд-во «Ивановский государственный университет», 2005.

8.4. Интернет – ресурсы

www.Math-Net.ru – имеется свободный доступ (по истечении 3-х лет со дня публикации) к математическим журналам Отделения Математики РАН,
http://en.wikipedia.ru – созданная пользователями интернет-энциклопедия,
http://mathworld.wolfram.com – краткие энциклопедические статьи по математике,
http://eqworld.ipmnet.ru – решение различных типов уравнений, в том числе, дифференциальных,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk – статьи по истории математики.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

При подготовке к практическим занятиям и самостоятельной работе используются компьютерные классы со стандартным программным обеспечением:

- ОС Windows,
- пакет программных средств офисного назначения MS Office,
- стандартные пакеты прикладных программ по математике.

На лекциях и практических занятиях могут быть использованы мультимедиа-проектор в комплекте с персональным компьютером и экраном.

10. Образовательные технологии

При реализации программы дисциплины используются различные образовательные технологии.

В начале дисциплины применяется метод адаптивного обучения – способ организации учебного процесса (Введение, практическое занятие 1) и в процессе обучения.

Активные методы обучения: работа в группах, подготовка докладов.

Тестирование – контроль знаний с помощью тестов с открытыми и закрытыми вопросами для текущей и промежуточной аттестации, самоконтроля. Заключительная тема модуля может быть проведена в форме тестирования. Она позволяет выявить итоговый уровень подготовленности студента в зависимости от посещения им аудиторных занятий, выполнения практических заданий и самостоятельной работы.

11. Оценочные средства, методические рекомендации по организации изучения дисциплины

Балльная система оценки:

Очное отделение:

2 семестр.

Аудиторные контрольные работы:

- Матрицы и определители (20 баллов)
- Системы линейных уравнений (20 баллов);

Домашняя контрольная работа:

- Исследование СЛУ (20 баллов).

Реферативная работа (10 баллов)
Бонусные баллы за активность на практических занятиях (10 баллов)
Экзамен (30 баллов)

3 семестр

Аудиторные контрольные работы:

- Векторы (15 баллов)
- Аналитическая геометрия на плоскости (15 баллов)
- ОЗЛП. (15 баллов)

Домашние контрольные работы:

- Аналитическая геометрия в пространстве (5 баллов)
- Исследование пары двойственных задач (10 баллов)

Реферативная работа (10 баллов)
Бонусные баллы за активность на практических занятиях (10 баллов)
Экзамен (30 баллов)

Заочное отделение:
2 семестр.

- Выполнение межсеместровой контрольной работы (30 баллов)
- Активность на установочной сессии (20 баллов)
- Реферативная работа (10 баллов)
- Активность в межсессионный период
- Экзамен (30 баллов)

3 семестр.

- Выполнение межсеместровой контрольной работы (30 баллов)
- Активность на установочной сессии (20 баллов)
- Реферативная работа (10 баллов)
- Активность в межсессионный период

Экзамен

11.1. Темы практических и семинарских занятий

Векторная алгебра
Арифметическое векторное пространство.

1.2. Выполнить указанные операции с векторами:

а) (1; 2; 1) + (–1; –1; –2)

б) (1; 1; –3; 2) + (–1; –1; –3; –2)

в) 4 · (4; 1; 2; 0) – 7 · (2; –1; 0; 5)

г) 5 · (–1; 3; –2) – 2 · (5; 0; –5) + 3 · (5; –5; 0)

Элементы аналитической геометрии.
Скалярное и векторное произведения векторов.

2.1. Векторы a и b образуют угол $\pi/6$, $|a| = 2$ и $|b| = 5$. Найти (a, b).
2.2. Векторы a и b образуют угол $\pi/4$, $|a| = 4$ и $|b| = 3$. Найти (a, b).
2.3. Векторы a и b образуют угол $2\pi/3$, $|a| = 3$ и $|b| = 2$. Найти (a, b).
2.4. Векторы a и b образуют угол $\pi/6$, $|a| = 2$ и $|b| = 1$. Найти $(2a - 3b, 4a + 2b)$.
2.5. Векторы a и b образуют угол $\pi/4$, $|a| = 4$ и $|b| = 3$. Найти $(2a - 3b, a + 2b)$.
2.6. Векторы a и b образуют угол $2\pi/3$, $|a| = 3$ и $|b| = 2$. Найти $(a - 3b, 4a + 2b)$.

Прямая на плоскости.

2.7. Даны точки A = (1;2), B = (3;0), C = (6;2). Найти уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной вектору $\overline{BC}$.
2.8. Даны точки A = (3;1), B = (1;-1), C = (0;2). Найти уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной вектору $\overline{BC}$.
2.9. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A = (1;2) и B = (3;8).
2.10. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A = (1;2) и B = (3;4).
2.11. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A = (-1;0) и B = (-1,3).

Плоскость.

2.12. Даны точка A = (1;-2;5) и вектор a = {-3,4,7}. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору a.
2.13. Даны точки A = (1;2;0), B = (3,0,-3), C = (6,2,-2). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\overline{BC}$.
2.14. Даны точки A = (1;2;-1), B = (1,0,-1), C = (0,2,2). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\overline{BC}$.
2.15. Точка M_0 = (2;3;-1) – основание перпендикуляра, опущенного из точки A = (1;2;-1) на плоскость. Найти уравнение этой плоскости.
2.16. Точка M_0 = (3;4;-2) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Найти уравнение этой плоскости.

Прямая в пространстве.

2.17. Даны точки A = (1;2;0), B = (3,0,-3), C = (6,2,-2). Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A и параллельной вектору $\overline{BC}$.
2.18. Даны точки A = (1;2;-1), B = (1,0,-1), C = (0,2,2). Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A и параллельной вектору $\overline{BC}$.
2.19. Даны точки A = (1;2;0) и B = (3,0,-3). Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A и B.
2.20. Даны точки A = (3;-2;1) и B = (5,0,2). Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A и B.
2.21. Даны точка A = (1;-3;2) и прямая L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой L.

Литература :[1,4,6,9,10,12,13,14,15]
Учебно-методическая литература:[2]

Матрицы и определители.
Матрицы.

1.3. Найти матрицу $\lambda\text{A} + \mu\text{B}$, если:

а) $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\text{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2,\ \mu = -3;$

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 8\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 5\end{pmatrix}$, $\lambda=3,\ \mu=-2$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $\lambda=5,\ \mu=-1$.

1.4. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 6 & -2 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11 & -2\\ 1 & 5\\ -7 & 0\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 1 & 13\\ 6 & 1 & 5\\ -3 & -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -10\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Определители.

.

1.1.1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix}7 & 5\\ 10 & 7\end{vmatrix}$; *д)* $\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 100 & 100\end{vmatrix}$; *е)* $\begin{vmatrix}0{,}1 & 0{,}01\\ 1 & 0{,}1\end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix}1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/2\end{vmatrix}$; *з)* $\begin{vmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/3 & -1/3\end{vmatrix}$; *и)* $\begin{vmatrix}5 & 25\\ 1/5 & -1/5\end{vmatrix}$;

к) $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}$.

Системы линейных уравнений (СЛУ)

Система линейных уравнений. Метод Гаусса.

1.1. Решить систему методом Гаусса:

а)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -4x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

г)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 6x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
Задача линейного программирования (ЛП)

Данное практическое занятие может быть представлено в виде тематической дискуссии и деловой игры.

Предмет математического программирования. Общая задача математического программирования. Графический метод решения задач линейного программирования

Основные определения

Предмет математического программирования. Математическая модель экономической задачи. Переменные задачи, система ограничений, целевая функция. Формулировка общей задачи математического программирования. Допустимое решение, область допустимых решений, оптимальное решение.

Примеры составления математических моделей задач линейного программирования. Задача об использовании ресурсов (сырья). Задача о рационе (диете).

Различные формы записи задач линейного программирования. Приведение общей задачи линейного программирования к каноническому виду. Теорема о замене неравенства уравнением.

Графический метод решения задач линейного программирования с двумя и n переменными. Теорема о виде области решений линейного неравенства. Теорема об изменении значения целевой функции. Линия уровня, опорная прямая. Алгоритм метода.

Формулы

Математическая модель задачи математического программирования. Математическая модель общей задачи линейного программирования. Каноническая задача в координатной, векторной и матричной записи. Математическая модель симметричной задачи.

Свойства решений задач линейного программирования

Основные определения

Выпуклая линейная комбинация точек. Угловая точка множества. Выпуклое множество. Многоугольники и многогранники. Выпуклость области допустимых решений. Теорема об экстремуме целевой функции. Опорное решение. Теоремы о взаимосвязи опорного решения и угловых точек области допустимых решений. Идея симплексного метода. Построение начального опорного решения и переход от одного опорного решения к другому.

Формулы

Задание отрезка. Выпуклые линейные комбинации точек. Формулы для пересчёта правых частей системы уравнений ограничений задачи линейного программирования. Формула для вычисления параметра θ_{0k} для определения разрешающего элемента при нахождении начального опорного решения и при переходе к другому опорному решению.

Задача 1.1.1. Малое предприятие (МП) выпускает два вида прохладительных напитков (“Радуга” и “Сияние”), предназначенных для детей и взрослых соответственно. В производстве напитков используется 4 вида сырья: газированная вода, фруктовый сироп, лед и тонизирующая добавка. Нормы расхода сырья на производство одной партии напитков и прибыль от ее реализации даны в таблице 1.1.1.

Таблица 1.1.1

Сырье	Норма расхода сырья		Суточный запас сырья
	“Радуга”	“Сияние”	
Газ. вода	6 л	5 л	1200 л
Фруктовый сироп	1 л	0,5 л	150 л
Лед	0,6 кг	1,2 кг	150 кг
Тонизирующая добавка	0,1 кг	0,5 кг	30 кг
Прибыль от партии напитка	30 руб.	40 руб.	

Выполните следующие задания:
1. Введите переменные.
2. Определите целевую функцию.
3. Составьте систему ограничений.
4. Определите вид математической модели задачи.
5. Преобразуйте её к другим видам задачи ЛП.

Задача 1.1.3. Диетолог разрабатывает новую диету, состоящую из сливочного масла, натуральных бифштексов (мяса), хлеба и яблочного сока. Содержание калорий, белков, жиров, углеводов и холестерина (в 100 г продукта), а также максимальные и минимальные нормы их потребления (в день) приведены в таблице 1.1.3. Здесь же указана цена в рублях 100 г соответствующего продукта.

Таблица 1.1.3

Элемент питания	Содержание в 100 г продукта				Норма потребления	
	масло	мясо	хлеб	сок	min	мах
Калории	800	280	245	80	2400	2800
Белок	0,6 г	15 г	8 г	0 г	60 г	60 г
Жир	20 г	5 г	0 г	0 г	0 г	30 г
Углеводы	0 г	0 г	5 г	10 г	10 г	40 г
Холестерин	0,15 г	0,08г	0 г	0 г	0 г	0,5 г
Цена	3	4	0,5	1		

Выполните следующие задания:
1. Введите переменные.
2. Определите целевую функцию.
3. Составьте систему ограничений.
4. Определите вид математической модели задачи.
5. Преобразуйте её к другим видам задачи ЛП.

П.1.2. Графическое решение задачи ЛП

Задача 1.2.1. Простейшая диета состоит из телятины и хлеба. Содержание в 100 г продукта калорий и холестерина дано в таблице 1.2.1.

Таблица 1.2.1,а

Элемент питания	Содержание в 100 г продукта		Норма потребления	
	телятина	хлеб	min	max
Калории	600	200	2400	3000
Холестерин	0,15	0,10	0	0,9
Цена	3	0,5		

Таблица 1.2.1,б

Элемент питания	Содержание в 100 г продукта		Норма потребления	
	телятина	хлеб	min	max
Калории	300	200	2400	3600
Холестерин	0,1	0,1	0	1,5
Цена	4	3		

Для приведенных данных:

1. Составьте математическую модель задачи.
2. Найдите графически оптимальное решение задачи.

Задача 1.2.3. Имеет ли решение задача линейного программирования:

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Ответ обоснуйте с помощью графического решения. Как изменится решение, если в условии заменить max на min?

Задача 1.2.4. Решите графически задачу линейного программирования:

$$F = 1 - x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Контрольные вопросы для проверки усвоения материала

1. Что такое математическое программирование?
2. Что такое математическая модель?
3. Что называется переменными задачи, системой ограничений и целевой функцией?
4. В чём заключается общая задача математического программирования?
5. Записать математическую модель математического программирования в общем случае.
6. Записать математическую модель общей задачи линейного программирования.
7. Сформулировать определения допустимого и оптимального решений.
8. Привести примеры составления математических моделей.

Контрольные вопросы для проверки усвоения материала (продолжение)

9. Записать математическую модель канонической задачи в координатной, координатной компактной, векторной и матричной видах.
10. Записать математическую модель симметричной задачи линейного программирования.
11. Сформулировать теорему о замене неравенства уравнением.
12. Что такое дополнительные переменные и каким образом они вводятся в ограничения и в целевую функцию?
13. Как перейти в задаче от нахождения максимума к нахождению минимума и наоборот.
14. Как обеспечить неотрицательность переменных?
15. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?
16. Сформулировать теорему о виде области решений линейного неравенства.
17. Что такое линия уровня и как найти её нормаль?
18. Сформулировать теорему об изменении значений целевой функции на линиях уровня.
19. Когда значение целевой функции возрастает и когда убывает?
20. Какая линия называется опорной прямой?
21. Какие возможны случаи при нахождении оптимального решения?
22. Сформулировать алгоритм графического метода для задач с двумя переменными.
23. В каком случае можно решить графическим методом задачу с числом переменных больше двух?
24. Сформулировать алгоритм решения графическим методом задачи с числом переменных больше двух.

Симплексный метод линейного программирования

Это практическое занятие можно провести в форме деловой игры и дискуссии.

Основные определения

Преобразование целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому. Теорема об улучшении опорного решения, её следствия. Алгоритм симплексного метода.

Формулы

Формула для приращения целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому. Формула для расчёта оценок разложений векторов условий по базису опорного решения. Условие для наискорейшего приближения к оптимальному решению. Признак оптимальности опорного решения. Условие существования единственного оптимального решения. Условие существования бесконечного множества оптимальных решений. Признак отсутствия решения ввиду неограниченности целевой функции.

Задача 1.3.1.

а)

$$F = x_1 + 2x_2 + 5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ -x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

б)

$$F = 10 - 6x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 \le 36 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_1 + 2x_2 \le 28 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

в)

$$F = x_1 + 3x_2 + 1 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 14 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

1. Определите вид задачи ЛП.
2. Приведите задачу к симплексной форме.
3. Решите симплекс-методом.
4. Решите графически.

<u>Задача 1.3.6.</u>

$$F = x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0, \ x_5 \ge 0, x_6 \ge 0.$$

1. Определите вид задачи ЛП.
2. Приведите задачу к симплексной форме.
3. С помощью симплекс-метода определите, имеет ли решение данная задача.

Решите следующие задачи симплекс-методом:

<u>Задача 1.3.7.</u>

$$F = x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 19 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0.$$

<u>Задача 1.3.8.</u>

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 2 \\ \ \ x_1 - \ x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0.$$

Двойственность в линейном программировании

Задача.1.4.1. Составьте задачи двойственные к следующим:

а)

$$F = x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8 \end{cases}$$

б) $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 1 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 = 8 \end{cases}$$

в) $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$

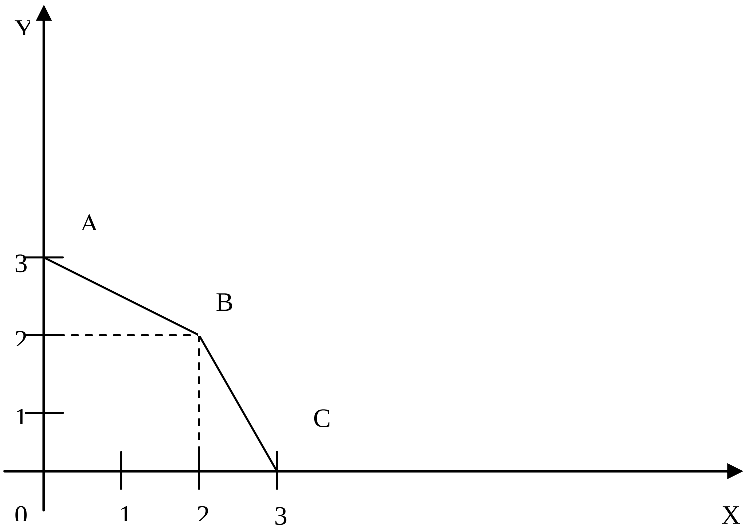
$$F = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

11.2. Задания для тестирования

1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 6 & -7 \end{vmatrix}$	1) -4; 2) 4; 3) -5; 4) 0
2. Перемножьте матрицы 4 (0;-1;2)* $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 2) (-1;-1); 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
3. Вычислите алгебраическое дополнение A_{21} $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	1) -22; 2) -1; 3) 22; 4) 1
4. Найдите решение системы: $\begin{cases} 6x-y+3z=7 \\ 2x+2y+3z=0 \\ x+5z=1 \end{cases}$	1) (0;1;-1); 2) (1;-1;0); 3)(-1;1;0)
5. Какое из решений является решением по методу Крамера $\begin{cases} 7x - y = 7, \\ x + 7y = 1; \end{cases}$	1) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}$; 2) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$; 3) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}$
6. При каких значениях параметра система совместна, при каких несовместна $\begin{cases} 3x - 6y = a \\ x - 2y = 8 \end{cases}$	1) a≠24-совместна; a=24-несовместна 2) a=24-совместна; a≠24-несовместна 3) a=6-совместна; a≠-6-несовместна
7. Найти расстояние между точками A(1;3;-2) B(7;6;0)	1) 7; 2) -7; 3) 11

8. Какие из векторов коллинеарны какие ортогональны $\bar{a}(2;5;1)$; $\bar{b}(1;2;5)$; $\bar{c}(-10;4;0)$; $\bar{d}(5;-2;0)$	1) $\bar{a} \perp \bar{b}$; $\bar{a} \parallel \bar{d}$; $\bar{a} \perp \bar{d}$; 2) $\bar{b} \perp \bar{c}$; $\bar{a} \parallel \bar{d}$; $\bar{b} \perp \bar{d}$; 3) $\bar{c} \parallel \bar{d}$ $\bar{a} \perp \bar{c}$; $\bar{a} \perp \bar{d}$
9. Найдите верный вариант, характеризующий расположения плоскостей в декартовой системе координат $\alpha: 14y = 7$ $\beta: x - 14y = 8$ $\gamma: 2x - 3y + 3z = 0$	1). $\gamma \parallel oz$; $\beta \perp oz$; α проходит через O(0;0;0); 2). $\beta \perp oz$; $\alpha \parallel oz$; γ проходит через O(0;0;0); 3). $\alpha \perp oy$; $\beta \parallel oz$;; γ проходит через O(0;0;0);
10. Заданы 2 плоскости и 2 прямые, определить взаимное расположение прямых и плоскостей, если α_1:7x +2y –z = 1; α_2 : 3x-y+z -5= 0; $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$; $L_2: \frac{x-7}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$	1) $L_1 \perp \alpha_2$, $L_2 \parallel \alpha_1$; 2) $L_1 \parallel \alpha_1$, $L_2 \perp \alpha_2$; 3) $L_1 \parallel \alpha_1$, $L_2 \parallel \alpha_2$; 4) $L_1 \perp \alpha_1$, $L_2 \perp \alpha_2$.
11. Множеством допустимых решений задачи линейного программирования является фигура, изображенная на рисунке. Определите максимум функции $F = 3x + y$ 	1) 12; 2) 9; 3) не существует; 4) ∞ .

11.3. Задания для проведения контрольных работ

1 - 10. В декартовой прямоугольной системе координат даны координаты вершин пирамиды ABCD. Постройте чертеж и решите следующие задачи:

а) докажите, что система векторов $\overline{e_1} = \overline{AB}$, $\overline{e_2} = \overline{AC}$, $\overline{e_3} = \overline{AD}$ линейно независима;

б) постройте вектор $\overline{MN}$, где M и N - середины ребер AD и BC соответственно, найдите его координаты и его разложение по базису $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$;

в) найдите длину ребра AB;

г) вычислите величину угла между ребрами AB и AC;

д) напишите уравнение прямой AB;

е) составьте уравнение плоскости ABC;

ж) напишите уравнение высоты, опущенной из вершины D на плоскость ABC.

1. A(1,-1,0), B(2,3,1), C(-1,1,1), D(4,-3,5).

2. A(2,0,-1), B(1,1,1), C(4,6,6), D(-1,2,3).

3. A(-3,1,1), B(0,-4,-1), C(5,1,3), D(4,6,-2).

4. A(1,1,4), B(2,1,2), C(1,-1,2), D(6,-3,8).

5. A(2,1,-4), B(-3,-5,6), C(0,-3,-1), D(-5,2,-8).

6. A(3,0,1), B(1,3,0), C(4,-1,2), D(-4,3,5).

7. A(3,0,-1), B(-1,-2,-4), C(-1,2,4), D(7,-3,1).

8. A(2,-2,1), B(1,2,-1), C(1,0,2), D(2,1,0).

9. A(1,-1,1), B(2,1,-1), C(-2,0,3), D(2,-2,-4).

10. A(0,1,-1), B(-3,0,1), C(1,2,0), D(1,-1,2).

11 – 20. При выполнении плана товарооборота магазин должен продать товары трех видов в количествах a_{11}, a_{12}, a_{13} (тыс. штук) соответственно. Если продавать эти товары в количествах a_{21}, a_{22}, a_{23} (тыс. штук) соответственно, то план товарооборота будет перевыполнен в полтора раза. Если же товары продать в количествах a_{31}, a_{32}, a_{33} (тыс. штук) соответственно, то выполнение плана составит лишь 75%.

Постройте математическую модель задачи и определите стоимость единицы товара каждого вида, если план товарооборота составляет Q тыс. руб.

Решите задачу:

а) методом Крамера;

б) методом Гаусса;

в) методом с использованием обратной матрицы.

План товарооборота магазина Q (тыс. руб.) и значения a_{ij} (в виде матрицы) даны ниже.

11. $Q = 16,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

16. $Q = 28,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

12. $Q = 18,\ A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3/2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

17. $Q = 36,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 11 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix};$

13. $Q = 20,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix};$

18. $Q = 42,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

14. $Q = 24,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix};$

19. $Q = 32,\ A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix};$

15. $Q = 80,\ A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 15 \\ 10 & 10 & 10 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; 20. $Q = 12,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

21-30. Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов. На изготовление единицы изделия А требуется затратить сырья каждого вида a_1, a_2, a_3 кг соответственно, а для единицы изделия В - b_1, b_2, b_3 кг. Производство обеспечено сырьем каждого вида в количестве p_1, p_2, p_3 кг соответственно. Стоимость единицы изделия А составляет c_1 рублей, а единицы изделия В – c_2 рублей. Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную стоимость готовой продукции.

а) Решить исходную задачу геометрически;

б) Решить задачу симплекс - методом;

в) Сформулировать двойственную задачу и найти ее решение;

г) Найти интервалы устойчивости двойственных оценок.

№	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	c_1	c_2
21	2	3	5	5	4	3	432	424	582	34	50
22	4	2	1	1	3	5	240	180	251	40	30
23	2	3	5	7	3	1	560	300	332	55	35
24	1	3	5	3	4	1	300	477	441	52	39
25	2	3	5	5	4	3	432	424	582	22	40
26	3	2	5	1	8	6	330	800	745	33	24
27	3	3	1	4	1	5	600	357	600	42	26
28	5	4	2	4	2	6	810	980	786	34	36
29	2	4	3	4	4	2	580	680	438	30	44
30	5	4	1	2	5	7	750	807	840	30	49

11.4. Вопросы для подготовки к экзамену(зачету)

1. Матрицы, виды матриц.
2. Операции над матрицами (умножение матрицы на число, сумма, разность матриц, умножение матриц, возведение в степень)
3. Транспонирование матриц, его свойства.
4. Вычисление определителя матриц (второго и третьего порядка)
5. Минор, алгебраическое дополнение к элементу матрицы. Теорема Лапласа (о вычислении определителя квадратной матрицы).
6. Свойства определителей.
7. Обратная матрица, алгоритм ее нахождения.
8. Элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы.
9. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований над строками.
10. Линейная зависимость и независимость строк матрицы.
11. Системы линейных уравнений (общие понятия).
12. Метода решения систем линейных уравнений (Крамера, обратной матрицы, Гаусса).
13. Теорема Кронекера – Капели.
14. Решение неопределенных систем линейных уравнений (основные, свободные переменные, базисные решения).
15. Геометрическое решение систем линейных неравенств.

16. N – мерное Эвклидово пространство векторов.
17. Линейная зависимость и независимость векторов.
18. Уравнения прямой и плоскости в пространстве.
19. Экономико – математическая модель в Линейном программировании.
20. Основная задача линейного программирования (ОЗЛП).
21. Свойства ОЗЛП.
22. Геометрический метод решения ОЗЛП.
23. Симплексный метод решения ОЗЛП.
24. Симплекс – таблицы для решения ОЗЛП.

Автор-составитель:
Туртин Д.В. доцент, к.ф.-м.н. кафедры ГЕНД